

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
CÂMPUS VOTUPORANGA

ALEX SANDRO SILVA COELHO

**MÓDULO DE *SOFTWARE ON-LINE* PARA ANÁLISE DE VIGAS VIA EULER-
BERNOULLI**

VOTUPORANGA

2021

Alex Sandro Silva Coelho

MÓDULO DE *SOFTWARE ON-LINE* PARA ANÁLISE DE VIGAS VIA EULER-BERNOULLI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência para obtenção do diploma do Curso de bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Campus Votuporanga.

Professor Orientador: M.e Gustavo Cabrelli
Nirschl

Votuporanga
2021

Anverso para a FICHA CATALOGRÁFICA

(Após as correções da banca examinadora a ficha catalográfica deverá ser solicitada à biblioteca para confecção).

COLAR ATA

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por ter me ajudado na conclusão deste trabalho concedendo-me forças e sabedoria para ter feito tudo quanto foi necessário – sem

Ele eu não teria conseguido chegar onde cheguei.

Agradeço aos meus pais por estarem junto a mim nos momentos difíceis e terem me auxiliado e me incentivado quando foi preciso. Seus ensinamentos e exemplos sobre

força de vontade, empenho e dedicação foram muito úteis e os levarei por toda a vida.

Agradeço às minhas avós que também sempre estiveram ao meu lado me apoiando, em especial a minha avó Maria que desde criança tem cuidado de mim e sempre esteve torcendo pelo meu sucesso e me ajudando com suas orações.

Agradeço também ao meu professor orientador, professor M.e Gustavo Cabrelli Nirschl por ter sido tão importante na execução deste trabalho. Agradeço aos ensinamentos, às correções, à paciência e a toda a humanidade que demonstrou durante a execução de todo o processo de desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos demais profissionais do Câmpus que sempre estiveram à disposição para executarem seu trabalho e que – mesmo indiretamente – contribuíram para meu desenvolvimento como aluno e pessoa.

RESUMO

Grande parte dos programas de computador voltados à área de Engenharia Civil apresentam apenas o resultado final ou, quando detalham o processo de resolução, é mostrada somente uma parte dos cálculos. Devido a isso, elaborou-se um módulo para a realização da análise estrutural de vigas por meio da Teoria de Euler-Bernoulli, incorporado a um programa de computador já existente e disponível *on-line* chamado IFESTRUT. Esse programa possui uma área de comandos tipo “CAD” em que é possível fazer o desenho de estruturas isostáticas e hiperestáticas – incluindo deferentes tipos de vínculos e cargas. O programa foi desenvolvido pelo NEVE (Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental) – um grupo de pesquisa que desenvolve páginas na internet com módulos voltados à área de Engenharia Civil. O resultado do módulo de vigas aqui apresentado mostra os diagramas dos esforços e deslocamentos, além de, como principal diferencial, um relatório em PDF detalhando a teoria envolvida no processo de resolução, bem como os cálculos realizados para a obtenção dos resultados. Os cálculos e diagramas foram validação pela comparação com o *software* Ftool.

Palavras-chave: Análise estrutural. Programa de computador. Relatório detalhado. Teoria de Euler-Bernoulli.

ABSTRACT

Most of the *softwares* aimed at the civil engineering area present only the final result or, when they detail the resolution process, only a part of the calculations is shown. Due to this, a module was developed to perform the structural analysis of beams by means of the Euler-Bernoulli Theory, incorporated to an existing computer program available *on-line* called IFESTRUT. This *software* has a "CAD" type command area where it is possible to draw isostatic and hyperstatic structures - including different types of supports and loads. The program was developed by NEVE (Nucleus of Virtual and Experimental Engineering) - a research group that develops web pages with modules for the civil engineering area. The result of the beams module presented here shows the displacement, shear force and bending moment diagrams, and, as a major differential, a PDF report detailing the theory involved in the solving process, as well as the calculations performed to obtain the results. The calculations and diagrams were validated by comparison with Ftool software.

Keywords: Structural analysis. *Software*. Detailed report. Euler-Bernoulli theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Deformação de viga no modelo de Euler-Bernoulli.....	15
Figura 2 - Exemplo de viga sujeita a um carregamento distribuído.....	18
Figura 3 - Recorte e ampliação do trecho CC' da Figura 2	18
Figura 4 - Viga biengastada	21
Figura 5 - Esforço cortante	23
Figura 6 - Momento fletor	24
Figura 7 - Giro	24
Figura 8 - Deslocamento	24
Figura 9 - Modelo para a passarela.....	25
Figura 10 - Passarela: gráficos da cortante, momento fletor, rotação e deslocamento vertical.....	25
Figura 11 - Modelo para a passarela com rótula	26
Figura 12 - Passarela com rótula: gráficos da cortante, momento fletor, rotação e deslocamento vertical.....	26
Figura 13 - Tela inicial do Ftool	31
Figura 14 - Tela inicial do AC3 Members	32
Figura 15 - Tela de inserção de dados da calculadora <i>online</i> – Exemplo inicial	33
Figura 16 - Tela de resultados para os dados da Figura 13.....	33
Figura 17 - Tela inicial de inserção de dados da do VIGA <i>Online</i>	34
Figura 18 - Exemplo de estrutura isostática a ser calculada	34
Figura 19 - Diagrama de esforço cortante	35
Figura 20 - Diagrama de momento fletor.....	35
Figura 21 - Interface do IFESTRUT.....	37
Figura 22 - Funções do IFESTRUT	38
Figura 23 - Exemplo da tela com os resultados a partir da estrutura da Figura 13 ...	39
Figura 24 - Fluxograma – Cálculo da estrutura - Parte 1	40
Figura 25 - Fluxograma – Cálculo da estrutura - Parte 2	41
Figura 26 - Fluxograma do diagrama de Cortante.....	42
Figura 27 - Fluxograma do diagrama de Giro.....	43
Figura 28 - Fluxograma do diagrama de Deslocamento	43
Figura 29 - Fluxograma do Relatório.....	43
Figura 30 - Fluxograma do Sistema Global.....	44

Figura 31 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 1	45
Figura 32 – Diagrama de Momento Fletor - Exemplo 1 - Ftool.....	52
Figura 33 – Diagrama de Esforço Cortante do Exemplo 1 - Ftool.....	52
Figura 34 – Diagrama de Giro do Exemplo 1 - Ftool	53
Figura 35 – Diagrama de Deslocamento do Exemplo 1 - Ftool.....	53
Figura 36 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 2	59
Figura 37 - Momento Fletor - Exemplo 2 - Ftool.....	67
Figura 38 - Esforço Cortante do Exemplo 2 - Ftool	67
Figura 39 - Giro do Exemplo 2 - Ftool	68
Figura 40 - Deslocamento do Exemplo 2 - Ftool	68
Figura 41 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 3	69
Figura 42 - Momento Fletor - Exemplo 3 - Ftool.....	78
Figura 43 - Esforço Cortante do Exemplo 3 - Ftool	79
Figura 44 - Giro do Exemplo 3 - Ftool	79
Figura 45 - Deslocamento do Exemplo 3 - Ftool	80
Figura 46 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 4	81
Figura 47 - Momento Fletor - Exemplo 4 - Ftool.....	91
Figura 48 - Esforço Cortante do Exemplo 4 - Ftool	91
Figura 49 - Giro do Exemplo 4 - Ftool	92
Figura 50 - Deslocamento do Exemplo 4 - Ftool	92
Figura 51 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 5	94
Figura 52 - Momento Fletor - Exemplo 5 - Ftool.....	103
Figura 53 - Esforço Cortante do Exemplo 5 - Ftool	103
Figura 54 - Giro do Exemplo 5 - Ftool	104
Figura 55 - Deslocamento do Exemplo 5 - Ftool	104
Figura 56 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 6	106
Figura 57 - Estrutura do Exemplo 6 - Ftool	119
Figura 58 - Momento Fletor - Exemplo 6 - Ftool.....	120
Figura 59 - Esforço Cortante do Exemplo 6 - Ftool	120
Figura 60 - Giro do Exemplo 6 - Ftool	121
Figura 61 - Deslocamento do Exemplo 6 - Ftool	121

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CAD	<i>Computer Aided Design</i> (Projeto Auxiliado por Computador)
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CTICM	<i>Centre Technique Industriel de la Construction Métallique</i>
HTML	<i>HyperText Markup Language</i> (Linguagem de Marcação de Hipertexto)
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
NEVE	Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental
PDF	<i>Portable Document Format</i> (Formato Portátil de Documento)

LISTA DE SÍMBOLOS

E	módulo de elasticidade longitudinal do material da viga
I	momento de inércia da seção transversal da viga
A	área da seção transversal
L	comprimento da viga
h	altura da viga
P	carga pontual
q	carga distribuída
M	momento fletor
Q	esforço cortante
θ	giro
v	deslocamento transversal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	OBJETIVOS	13
1.1.1	Objetivo geral	13
1.1.2	Objetivos específicos	13
1.2	JUSTIFICATIVA	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1	TEORIA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI	15
2.1.1	Exemplos numéricos de Bittencourt (2003)	21
2.1.1.1	Exemplo 1 - Adaptado de Bittencourt (2003, p. 20)	21
2.1.1.2	Exemplo 2 - Adaptado de Bittencourt (2003, p. 26)	25
2.1.1.3	Exemplo 3 - Adaptado de Bittencourt (2003, p. 28)	26
2.2	FERRAMENTAS DE PROGRAMAÇÃO UTILIZADAS	27
2.2.1	HTML	27
2.2.2	JavaScript	28
2.2.3	Notepad++	29
2.2.4	PDFMake	29
2.2.5	Canvas	30
2.3	PROGRAMAS DE COMPUTADOR EXISTENTES	30
2.3.1	Ftool	31
2.3.2	A3C Members	31
2.3.3	Calculadora de Vigas <i>Online</i> para Esforços Elásticos	32
2.3.4	VIGA <i>Online</i>	34
3	METODOLOGIA	36
4	RESULTADOS	37
4.1	Programa base: IFESTRUT	37
4.2	MÓDULO DE VIGAS POR EULER-BERNOULLI (OBJETO DESTE TRABALHO)	39
4.3	Fluxogramas dos algoritmos implementados	40
4.4	Relatórios gerados E VALIDAÇÃO DO MÓDULO DE PROGRAMA	44
5	Considerações Finais	55
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	56

APÊNDICE A - EXEMPLOS DE ESTRUTURAS E RELATÓRIOS	
GERADOS.	58
A.1 - Exemplo 2 – Resultado.....	58
A.2 - Exemplo 3 – Resultado.....	68
A.3 - Exemplo 4 – Resultado.....	80
A.4 - Exemplo 5 – Resultado.....	93
A.5 - Exemplo 6 – Resultado.....	105

1 INTRODUÇÃO

Muitos *softwares*, a exemplo do Ftool, de Martha (2017) - programa de análise estrutural - são amplamente utilizados tanto por profissionais quanto por professores, no setor acadêmico. Entretanto, apesar de sua ampla utilização, eles apresentam, em sua maioria, apenas os resultados finais daquilo que foram solicitados, ou, quando mostram o método de resolução, se limitam a esclarecer apenas partes do processo.

Por causa disso, o Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental (NEVE), grupo de pesquisa cadastrado no CNPq, tem se empenhado em desenvolver páginas na internet a fim de realizar cálculos de Engenharia Civil, mas com um diferencial singular - apresentar todo o desenvolvimento desses cálculos e gerar um arquivo em PDF em que todo o passo a passo é explicitado; ademais, é apresentado um resumo da teoria tomada por base para sua efetuação.

Neste trabalho, é exposto o desenvolvimento de um módulo de um *software* já existente que trata da análise de estruturas lineares planas. Tal módulo visa à análise estrutural de vigas horizontais (isostáticas ou hiperestáticas), valendo-se, para tanto, da teoria de vigas de Euler-Bernoulli (comumente conhecida como Teoria de Vigas Clássica), descrita na fundamentação teórica.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVO GERAL

Este projeto teve por finalidade desenvolver um módulo de programa que realiza a análise de vigas (isostáticas ou hiperestáticas) por meio da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Além disso, fazendo jus ao *sui generis* do Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental (2015), ele também apresenta em PDF o detalhamento de todo o processo de cálculos a fim de que, dessa maneira, alunos, professores e profissionais possam utilizá-lo conforme sua necessidade.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

As etapas desse desenvolvimento foram divididas em:

- Estudo abrangente, com exemplos, dos conceitos teóricos supracitados;
- Implementação de rotinas computacionais acerca da análise de vigas via Euler-Bernoulli permitindo, assim, a aplicação dessas teorias para calcular e mostrar os diagramas de momento, cortante e deslocamentos de vigas isostáticas ou hiperestáticas;
- Desenvolvimento de rotinas computacionais a fim de gerar um relatório em PDF contendo, além da resolução numérica, o raciocínio utilizado durante a análise;
- Viabilizar, de modo *on-line*, o módulo do programa, visando ao auxílio de alunos, profissionais e professores no estudo como também na metodologia de ensino.

1.2 JUSTIFICATIVA

Um projeto estrutural de qualidade precisa estar baseado em uma exímia análise estrutural, pois sabe-se que os cálculos realizados para o dimensionamento advêm dessa análise. Portanto, é imprescindível ter um conhecimento refinado dos deslocamentos e esforços solicitantes e saber o comportamento da estrutura ante eles.

Tendo isso em vista, o módulo de software desenvolvido neste trabalho foca em fornecer conteúdo para que o estudo das estruturas se torne ainda mais rebuscado. De posse do arquivo em PDF, o interessado estará a par de todo o processo de equações que resultou nas informações apresentadas pelo software, acerca da análise estrutural de vigas via Teoria de Euler-Bernoulli, após a inserção da estrutura em sua área de desenho.

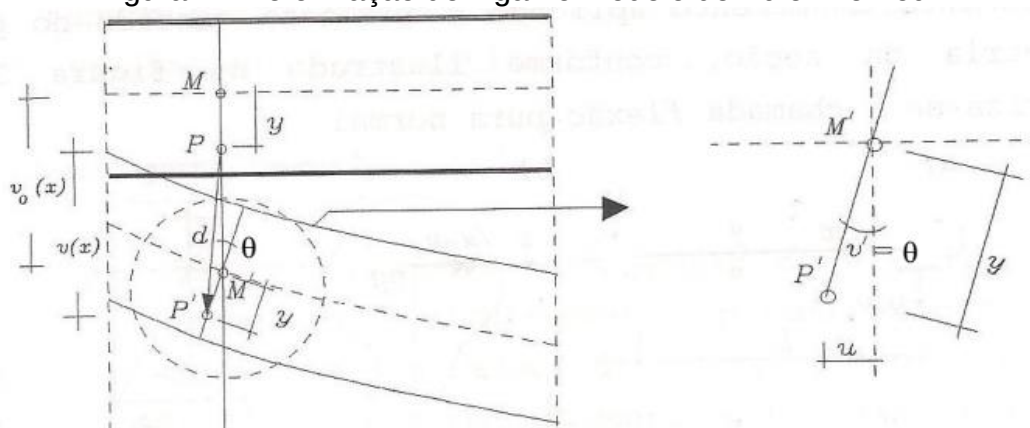
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 TEORIA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

Conforme Proença (2018), a teoria de vigas de Euler-Bernoulli (comumente conhecida como Teoria de Vigas Clássica), desenvolve a análise estrutural de vigas. Por desprezar o cisalhamento da seção transversal, considerando apenas o efeito da flexão, essa teoria é também chamada de teoria de flexão pura. Em vigas longas, os resultados fornecidos para a deformação são satisfatórios, no entanto o mesmo não ocorre para vigas curtas. Para melhor compreensão, segundo Beer et al. (2011), na prática, admite-se por curta a viga cuja relação altura (h) por comprimento (L) é maior que 0,1 ($h/L > 0,1$).

Proença (2018) cita que, na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, o modelo proposto supõe que o movimento de deformação que ocorre em uma viga submetida à flexão não altera a geometria das seções, que são planas originalmente (seção que passa por M e P na Figura 1); ou seja, essas seções continuarão a ser planas e ortogonais ao eixo da viga mesmo após estarem deformadas (seção que passa por M' e P' da figura 1), não importando a distância longitudinal da extremidade.

Figura 1 - Deformação de viga no modelo de Euler-Bernoulli.



Fonte: Adaptado de Proença (2003, p. 98)

Segundo Proença (2018), para as componentes vertical e horizontal de um vetor deslocamento “ d ” em um ponto P qualquer da viga (observe na figura 1), advêm dessa hipótese as relações (1) e (2) e (3):

$$v(x) = v_0(x) - y + y \cos \theta \quad (1)$$

$$v(x) = v_0(x) - y * (1 - \cos \theta) \quad (2)$$

$$u(x) = -y * \sin \theta \quad (3)$$

Em que (veja na Figura 1):

$v_0(x)$ é o deslocamento de um ponto M, no eixo longitudinal da viga, até M';

$v(x)$ é o deslocamento de um ponto P, a uma distância "y" de M qualquer até P';

θ é o ângulo em que a seção transversal gira em torno do ponto M, que se confunde com $v'(x)$ naquele ponto;

$u(x)$ é o deslocamento horizontal do ponto P'.

Posto que a Resistência dos Materiais trabalha com pequenos giros e deformações nas aplicações da Engenharia Civil, Proença (2018) comenta que o ângulo θ é de veras pequeno e, desse modo, podem-se fazer algumas simplificações como: $\cos \theta = 1$ e $\sin \theta = \tan \theta = \theta$. Logo, chega-se às equações (4), (5), (6) e (7):

$$v(x) = v_0(x) \quad (4)$$

$$u(x) = -y * \theta \quad (5)$$

$$u(x) = -y * v'(x) \quad (6)$$

$$u(x) = -y * \frac{dv(x)}{dx} \quad (7)$$

Segundo Proença (2018), conforme ilustrado na figura 1, um giro θ horário da seção reflete em um deslocamento u em x para a esquerda; por isso há o sinal negativo na equação.

Da Resistência dos Materiais, é sabido que as deformações lineares e a deformação angular equivalem às equações (8), (9) e (10), de acordo com Proença (2018):

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (8)$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \quad (10)$$

Posteriormente, o autor ainda exhibe as componentes de deformação na equação (11) (que vêm da combinação das equações 4, 7, 8, 9 e 10):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x) \\ \varepsilon_y(x) \\ \lambda_{xy}(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y * \frac{d^2v(x)}{dx^2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Ainda analisando Proença (2018), percebe-se que a lei de Hooke detalha a relação tensão-deformação no regime elástico-linear conforme apresentado nas equações (12) e (13). Esta última vem da componente ε_x da equação (11) aplicada na equação (12).

$$\sigma_x = E * \varepsilon_x \quad (12)$$

$$\sigma_x = E * y * \frac{d^2v(x)}{dx^2} \quad (13)$$

O mesmo autor cita que o equilíbrio estático deve ser alcançado; posto isso, as tensões normais σ_x devem gerar um momento resultante na seção equivalente ao momento fletor calculado em função do carregamento externo de flexão (M). Explicitando matematicamente, tem-se a equação (14):

$$M = - \int \sigma_x * y dA \quad (14)$$

Unindo-a à lei de Hooke, conforme apresentada na equação (13), resulta-se a equação (15):

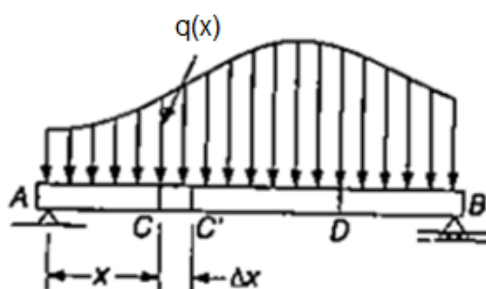
$$M = E * \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \int y^2 dA \quad (15)$$

Na Resistência dos Materiais, é conhecido que a integral existente na equação (15) resulta no momento de inércia de área da seção (I). Posto isso, forma-se a equação (16):

$$M = E * I * \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (16)$$

De modo correlato, Beer et al. (2011) desenvolve as equações em sequência supondo que haja um trecho de viga sujeito a carregamento distribuído $q(x)$:

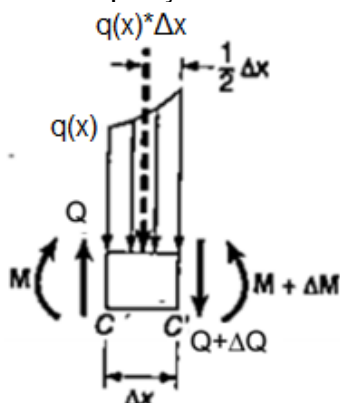
Figura 2 - Exemplo de viga sujeita a um carregamento distribuído



Fonte: Adaptado de Beer (2011, p. 790)

Selecionando a parte CC' da viga e desenhando seu diagrama de corpo livre, tem-se:

Figura 3 - Recorte e ampliação do trecho CC' da Figura 2



Fonte: Adaptado de Beer (2011, p. 790)

Obs: Q é o esforço cortante e M o momento fletor

Ao realizar o equilíbrio de forças verticais (com sentido positivo de forças para cima), chega-se às equações (17) e (18):

$$Q - (Q + \Delta Q) - q(x) * \Delta x = 0 \quad (17)$$

$$\Delta Q = q(x) * \Delta x \quad (18)$$

Dividindo a equação (18) por Δx e considerando-o um elemento infinitesimal dx , tem-se a equação (19):

$$\frac{dQ}{dx} = q(x) \quad (19)$$

Continuando a análise da figura 3 e fazendo o equilíbrio de momentos, chegou-se ao seguinte equacionamento (com o sentido positivo para momento anti-horário).

$$(M + \Delta M) - M - Q * \Delta x + \frac{q(x) * \Delta x^2}{2} = 0 \quad (20)$$

$$\Delta M = Q * \Delta x - \frac{q(x) * \Delta x^2}{2} \quad (21)$$

Mais uma vez, dividindo a equação (21) por Δx e considerando-a num elemento infinitesimal dx , tem-se que:

$$\frac{dM}{dx} = Q - \frac{q(x) * dx}{2} \quad (22)$$

Fazendo a consideração de que dx tende a zero, o resultado é este:

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (23)$$

A seguir, Beer et al. (2011) apresenta algumas análises feitas a partir das equações deduzidas acima. Primeiramente, correlacionam-se as equações (19) e (23):

$$\frac{dQ}{dx} = q(x) \text{ e } \frac{dM}{dx} = Q \rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = q(x) \quad (24)$$

Em seguida se faz uma relação entre M e Q (equações (16) e (23)):

$$M = E * I * \frac{d^2v(x)}{dx^2} \text{ e } \frac{dM}{dx} = Q \rightarrow Q = E * I * \frac{d^3v(x)}{dx^3} \quad (25)$$

Concluindo, une-se a equação (19) com a (25):

$$\frac{dQ}{dx} = q(x) \text{ e } Q = E * I * \frac{d^3v(x)}{dx^3} \rightarrow q(x) = E * I * \frac{d^4v(x)}{dx^4} \quad (26)$$

Desse modo, Proença (2018) mostra que é possível integrar sucessivamente as equações (19), (23), (25) e (26), conforme apresentado a seguir:

$$\frac{dQ}{dx} = q(x) \rightarrow Q = \int q(x)dx \quad (27)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \rightarrow M = \int Qdx \quad (28)$$

$$M = E * I * \frac{d^2v(x)}{dx^2} \rightarrow E * I * \frac{dv(x)}{dx} = \int Mdx \quad \left(\frac{dv}{dx} = \theta\right) \quad (29)$$

$$E * I * v(x) = \int \theta(x)dx \quad (30)$$

Conforme Proença (2018), quando houver descontinuidade das funções $q(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $v(x)$ ou $\theta(x)$, a viga deverá ser dividida em trechos. Posto isso, os casos mais comuns decorrentes são:

- Apoios intermediários;

- Ação (força ou momento) concentrada;
- Variação da rigidez à flexão ($E * I$).

Com a divisão em trechos, cada trecho terá 4 equações ((27) a (30) aplicadas considerando as condições de contorno), recaindo-se num sistema global de equações.

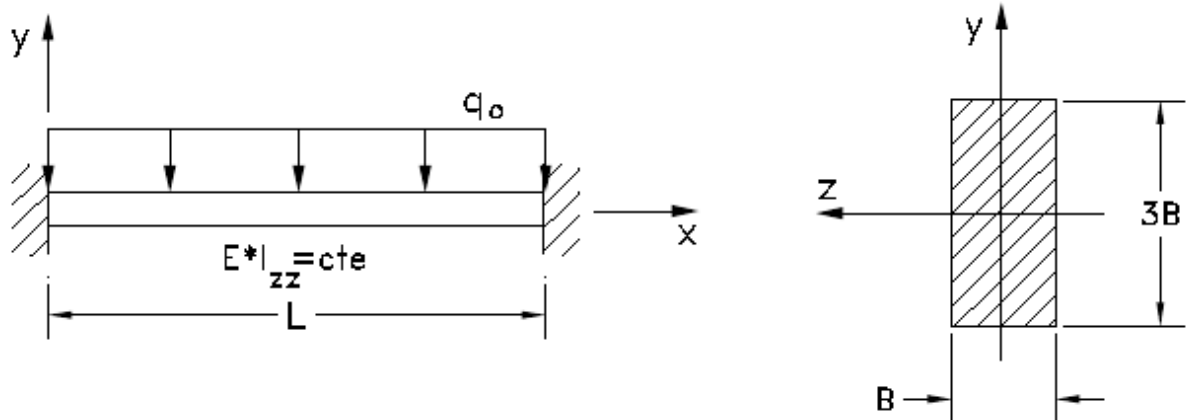
2.1.1 EXEMPLOS NUMÉRICOS DE BITTENCOURT (2003)

2.1.1.1 Exemplo 1 - Adaptado de Bittencourt (2003, p. 20)

A viga biengastada mostrada na Figura 4 deverá ser construída com um material que possui um módulo de elasticidade longitudinal (Young) $E = 2,0 \times 10^6 \text{ N} / \text{mm}^2$. A viga deve suportar uma carga uniformemente distribuída $q_0 = 10.000 \text{ N} / \text{m}$ ao longo de um vão $L = 5 \text{ m}$. Por razões construtivas a seção transversal de viga deverá ser um retângulo com dimensões $B \times 3B$, tal como mostrado.

Para esta viga solicita-se: a) as equações e os diagramas de esforço cortante, momento fletor, rotação e deslocamento vertical.

Figura 4 - Viga biengastada



Fonte: Bittencourt (2003, p. 20)

a) Equação do carregamento: $q(x) = -q_0$

b) Condições de contorno

$$\begin{aligned} v(x=0) &= 0 & v(x=L) &= 0 \\ \theta(x=0) &= 0 & \theta(x=L) &= 0 \end{aligned}$$

c) Integração da equação diferencial: $EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -q_0$

- 1ª Integração: força cortante

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = Q(x) = -q_0 x + C_1$$

- 2ª Integração: momento fletor

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

- 3ª Integração: giro

$$EI \theta(x) = -q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

- 4ª Integração: deslocamento transversal

$$EI v(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

d) Determinação das constantes de integração considerando as condições de contorno:

$$EI v(0) = -q_0 \frac{0^4}{24} + C_1 \frac{0^3}{6} + C_2 \frac{0^2}{2} + C_3 0 + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$\theta(0) = -q_0 \frac{0^3}{6} + C_1 \frac{0^2}{2} + C_2 0 + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$EI v(L) = -q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + C_3 L + C_4 = 0 \rightarrow -q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} = 0$$

$$\theta(L) = -q_0 \frac{L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L + C_3 = 0 \rightarrow -q_0 \frac{L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L = 0$$

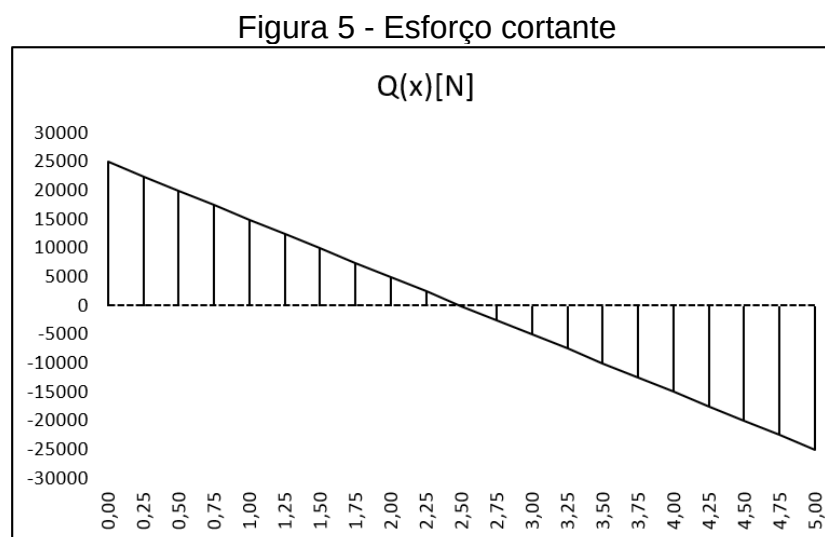
Resolvendo o sistema constituído das duas últimas equações anteriores, tem-se:

$$C_1 = q_0 \frac{L}{2} \text{ e } C_2 = -q_0 \frac{L^2}{12}$$

e) Equações finais

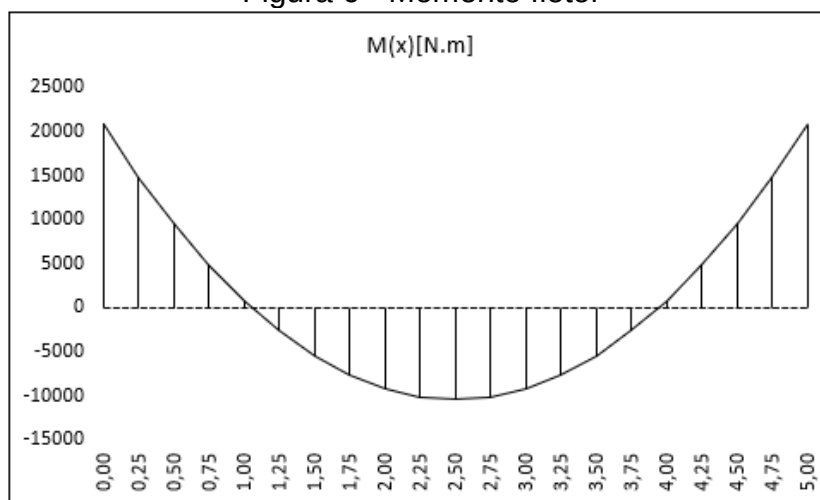
- Força cortante: $Q(x) = -q_0 x + q_0 \frac{L}{2}$
- Momento fletor: $M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 L \frac{x}{2} - q_0 \frac{L^2}{12}$
- Rotação: $EI\theta(x) = -q_0 \frac{x^3}{6} + q_0 L \frac{x^2}{4} - q_0 L^2 \frac{x}{12}$
- Deslocamento: $EIv(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + q_0 L \frac{x^3}{12} - q_0 L^2 \frac{x^2}{24}$

f) Diagramas finais



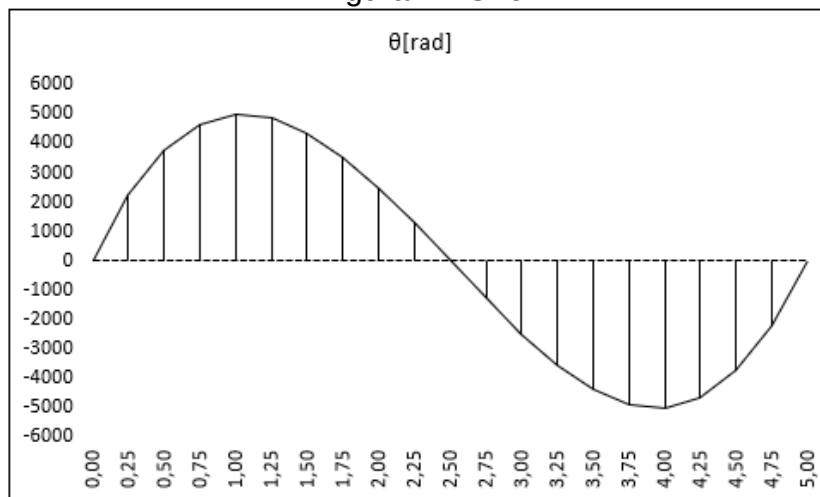
Fonte: o próprio autor por meio das equações do item f)

Figura 6 - Momento fletor



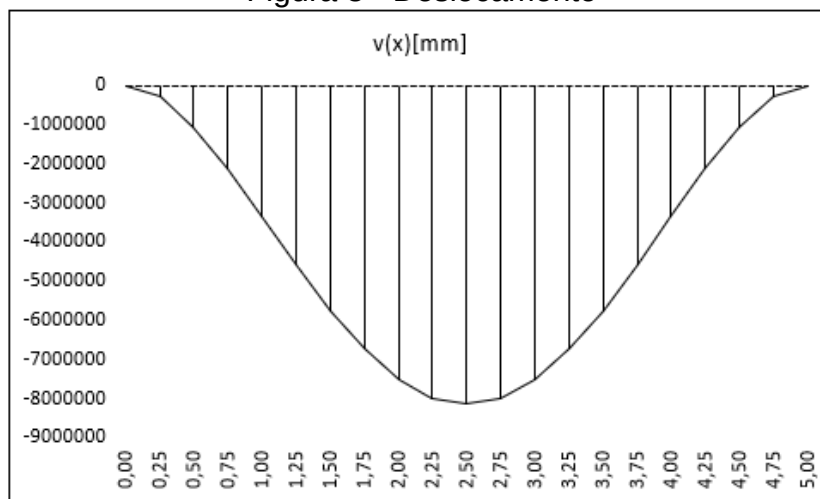
Fonte: o próprio autor por meio das equações do item f)

Figura 7 - Giro



Fonte: o próprio autor por meio das equações do item f)

Figura 8 - Deslocamento



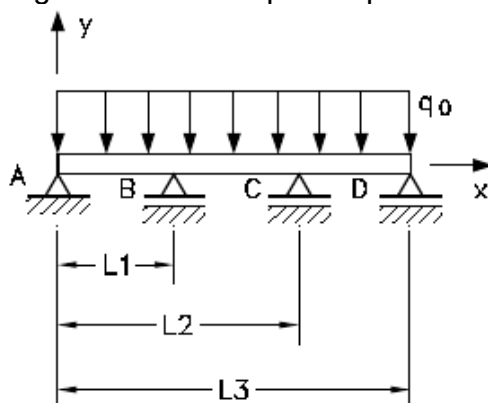
Fonte: o próprio autor por meio das equações do item f)

Para validação, este exemplo tem seus resultados gerados pelo programa objeto deste trabalho no item 4.4.

2.1.1.2 Exemplo 2 - Adaptado de Bittencourt (2003, p. 26)

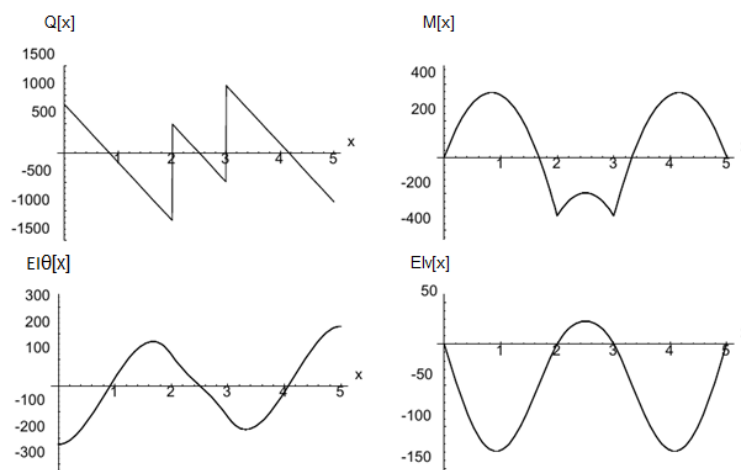
A Figura 9 representa uma passarela de pedestres construída por partes pré-moldadas unidas através de apoios. Tomando $q_0 = 1000 \text{ N/m}$, $L_1 = 2,0\text{m}$, $L_2 = 3,0\text{m}$, $L_3 = 5,0\text{m}$, tem-se as equações finais para a cortante, momento fletor, rotação e deslocamento vertical, estando os gráficos ilustrados na Figura 10. Vale ressaltar que a obtenção das equações se deu de forma análoga aos cálculos do Exemplo 1, sendo que as mesmas estão apresentadas no item A.1, geradas pelo programa objeto deste trabalho.

Figura 9 - Modelo para a passarela



Fonte: Adaptado de Bittencourt (2003, p. 27)

Figura 10 - Passarela: gráficos da cortante, momento fletor, rotação e deslocamento vertical

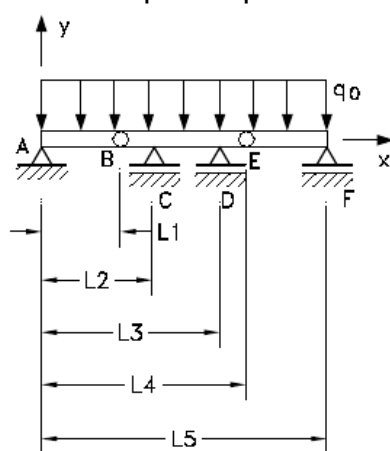


Fonte: Adaptado de Bittencourt (2003, p. 29)

2.1.1.3 Exemplo 3 - Adaptado de Bittencourt (2003, p. 28)

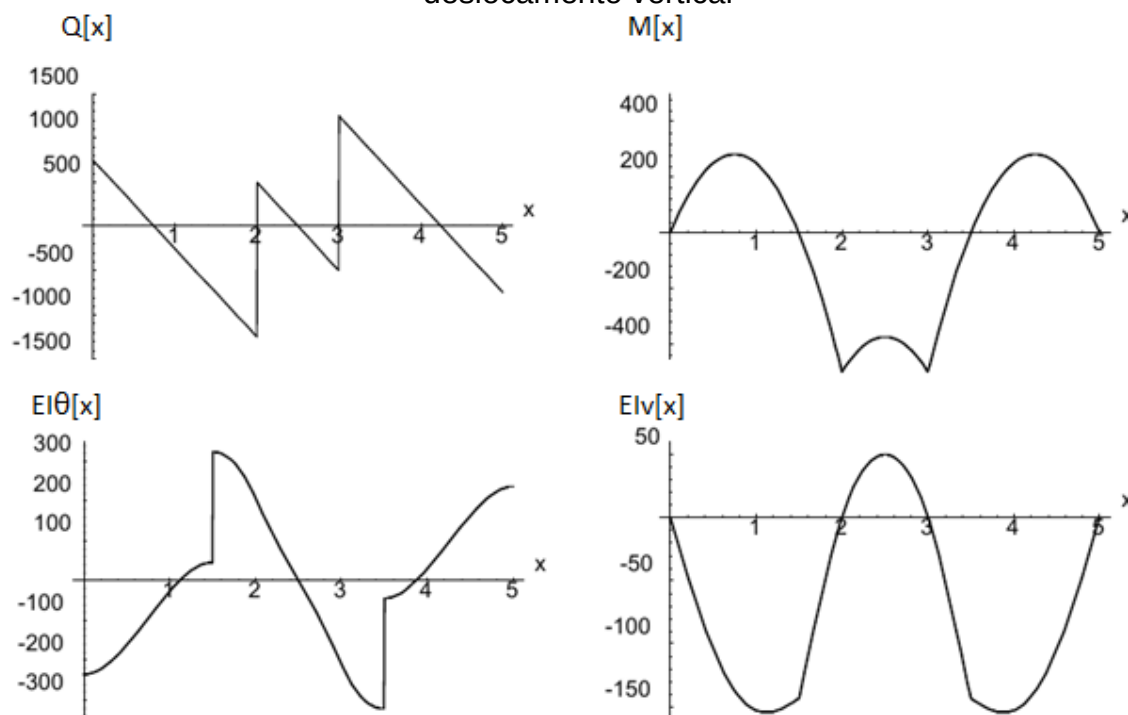
A Figura 11 representa uma passarela de pedestres construídas por partes pré-moldadas unidas através de apoios constituindo uma rótula. Tomando $q_0 = 1000 \text{ N/m}$, $L_1 = 1,5\text{m}$, $L_2 = 2,0\text{m}$, $L_3 = 3,0\text{m}$, $L_4 = 3,5\text{m}$ e $L_5 = 5,0\text{m}$, tem-se as equações finais para a cortante, momento fletor, rotação e deslocamento vertical, estando os gráficos ilustrados na Figura 12.

Figura 11 - Modelo para a passarela com rótula



Fonte: Adaptado de Bittencourt (2003, p. 27)

Figura 12 - Passarela com rótula: gráficos da cortante, momento fletor, rotação e deslocamento vertical



Fonte: Adaptado de Bittencourt (2003, p. 30)

As equações dos esforços e deslocamento estão apresentadas no item A.2, geradas pelo programa objeto deste trabalho.

2.2 FERRAMENTAS DE PROGRAMAÇÃO UTILIZADAS

Foram ferramentas essenciais para o desenvolvimento do módulo de programa apresentado neste trabalho as linguagens HTML e *JavaScript*, o *software* NotePad++ (disponível em Ho (2021)) e a biblioteca *JavaScript* Pdfmake (2021). Além disso, os trabalhos exigiram programação de desenhos numa tela gráfica (*canvas*).

2.2.1 HTML

Lemay (2002, p. 43, grifo nosso) declara que “HTML é a abreviação de *Hypertext Markup Language* (Linguagem de Marcação de Hipertexto)”. A autora também elucida o fato de que, como essa linguagem tem origem na SGML (*Standard Generalized Markup Language*, Linguagem de Marcação Generalizada Padrão), ela apenas descreve a estrutura de um documento.

Não obstante, Flatschart (2011, p. 21) acrescenta que “HTML é a principal linguagem utilizada na *web*”. Uma vez utilizada, ela permite que os documentos sejam estruturados em parágrafos, links, títulos, tabelas, listas, formulários e em diversos outros elementos que permitem a inserção de objetos, como imagens ou vídeos.

Segurado (2016, p. 14) explica que a linguagem HTML “é formada por textos e códigos especiais conhecidos como marcas ou *tags*”, por isso chama-se assim. Ademais, Flatschart (2011) acrescenta que essas *tags* são delimitadas pelos sinais `<>` e `</>` e que são elas “que identificam a função e o conteúdo de cada elemento da linguagem”.

A linguagem HTML possui um conjunto definido de *tags* e, quando utilizadas, possibilita a rotulação de diferentes partes da página, estruturando, portanto, o documento - acrescenta Lemay (2002). A autora dá exemplos de algumas das *tags* existentes, listadas a seguir, que produzem diferentes efeitos no navegador e revela que não é permitido a criação de *tags* próprias.

- *Tags* para estrutura geral da página: <html>, <head> e <body>;
- *Tags* para títulos, cabeçalhos e parágrafos: <title>, <h1> a <h6> e <p>, respectivamente;
- *Tags* para comentários <!--...-->;
- *Tags* para listas: , , , <dt> e <dd>

Segurado (2016, p. 2) ressalta que, na prática, não há obrigatoriedade em compilar dados, pois “as linhas de código HTML são interpretadas por um navegador que apresenta o resultado final ao usuário”.

Para concluir, Flatschart (2011) instrui que, para aumentar a interatividade com o usuário, pode-se incluir no HTML outras linguagens, como o *JavaScript* (seção 2.2.2).

Posto isso, vale ressaltar que o site do IFSP - Campus Votuporanga possui uma página da internet (<http://vtp.ifsp.edu.br/nev/>) em que todos os programas do grupo de pesquisa, com interfaces programadas em HTML, são hospedados, inclusive o IFESTRUT, que é o programa base do módulo apresentado neste trabalho.

A facilidade de utilização da linguagem HTML foi crucial para sua escolha, uma vez que seu acesso depende apenas de um *software* de navegação com acesso à internet instalado em um computador.

2.2.2 JAVASCRIPT

JavaScript, segundo Flatschart (2011, p. 23), é “uma linguagem de programação que pode ser incorporada diretamente em páginas HTML com a função de adicionar mais interatividade”;

Complementando-o, Segurado (2016, p. 67) afirma que *JavaScript* é “uma linguagem de alto nível, dinâmica e conveniente para estilos de programação orientados a objetos”. Ela é considerada pela autora como uma das linguagens de programação mais importantes da atualidade devido a sua ampla utilização em sites modernos.

Segurado (2016, p. 67) afirma que, em *JavaScript*, “todas as palavras devem ser sempre digitadas com a composição compatível de letras”. Isso não ocorre na linguagem HTML, uma vez que essa não diferencia letras maiúsculas de minúsculas.

Ainda conforme Segurado (2016), as instruções classificadas como condicionais (por exemplo, *if* e *switch*) estabelecem uma condição e, segundo o valor de uma expressão, o interpretador pode rodar ou ignorar outras instruções. Por sua vez, as instruções consideradas como laços (por exemplo: *while* e *for*) processam outras instruções por vezes repetidas. Há ainda os saltos (como *break*, *return* e *throw*) que são as instruções que fazem o interpretador pular para outra parte do código.

Para dar funcionalidade ao programa, a escolha da linguagem *JavaScript* ocorreu pelo fato de os orientadores do grupo estarem mais habituados a ela. Além do mais, todos os outros *websites* do grupo de pesquisa também se valem do *JavaScript*.

2.2.3 NOTEPAD++

O NotePad++ (disponível em Ho (2021)) é um editor de código fonte para os desenvolvimentos e sua escolha ocorreu pelo fato de o programa ser gratuito e de fácil compreensão.

2.2.4 PDFMAKE

O relatório PDF gerado pelo programa apresentado neste trabalho recorre à biblioteca *JavaScript Pdfmake* (2021), por meio da qual arquivos PDF podem ser gerados e abertos diretamente no navegador. Utilizando esta biblioteca, é possível a criação, dentro do arquivo em PDF, de tabelas, títulos, parágrafos, colunas, bem como um espaço para desenho próprio.

Contrapondo o que ocorre com *JavaScript*, não é possível a inserção de textos dentro do espaço de desenho. Para resolver essa questão, por meio das coordenadas da folha, podem ser inseridos os textos sobre o desenho, sem qualquer vínculo entre eles. Além do mais, faz-se necessário relevar o fato de que, quando o desenho dentro do espaço de desenho é maior que o espaço disponível na página, o Pdfmake (2021) gera uma quebra de página automática.

Assim sendo, pode haver uma desconexão entre os textos e o desenho, haja vista que os textos não acompanham esta quebra. Uma solução é iniciar todos os desenhos dentro do PDF após uma quebra de página forçada anteriormente englobando textos e espaço de desenho (seção 2.2.5).

2.2.5 CANVAS

CANVAS é um termo inglês que significa “tela gráfica”. Segundo Sousa (2013), no ano de 2004, a Apple necessitava de uma modernização no navegador Safari e, haja vista essa necessidade, esse conceito surgiu possibilitando ao navegador desenhos gráficos. O grupo WHATWG (*Web Hypertext Application Technology Working Group*) padronizou este conceito “como proposta de especificidade para novas tecnologias na *web*”, ainda segundo o Sousa (2013).

Ademais, o autor explica que, no objeto CANVAS, o uso de *plug-ins* de interpretação (ou ferramentas externas) não se faz necessário, uma vez que, por meio da anexação de um elemento de marcação (*tag*), de mesmo nome chamado `<canvas>`, em um documento HTML, a apresentação da composição gráfica gerada ocorre diretamente no navegador de internet.

Conquanto, Sousa (2013, p. 15) ressalta que a inserção de apenas uma *tag* `<canvas>` em um documento HTML5 (convenção padrão atual para desenvolvimento de interfaces *web*) “exibirá apenas um retângulo de cor sólida, com largura e altura definidas como atributo da *tag*”.

Desse modo, Sousa (2013, p. 18) acrescenta que, para haver a incorporação de imagens, animações, vídeos, efeitos e textos no objeto CANVAS, faz-se necessário a utilização da linguagem *JavaScript*, posto que ela é “a linguagem de programação com suporte sobre o contexto 2D do objeto CANVAS e gera um padrão gráfico de modo imediatamente interpretado e de alta performance”.

Observa-se ainda que o espaço de desenho que pode ser gerado em um arquivo PDF por meio da biblioteca PDFmake (2021) também é criado com os mesmos conceitos *canvas*.

2.3 PROGRAMAS DE COMPUTADOR EXISTENTES

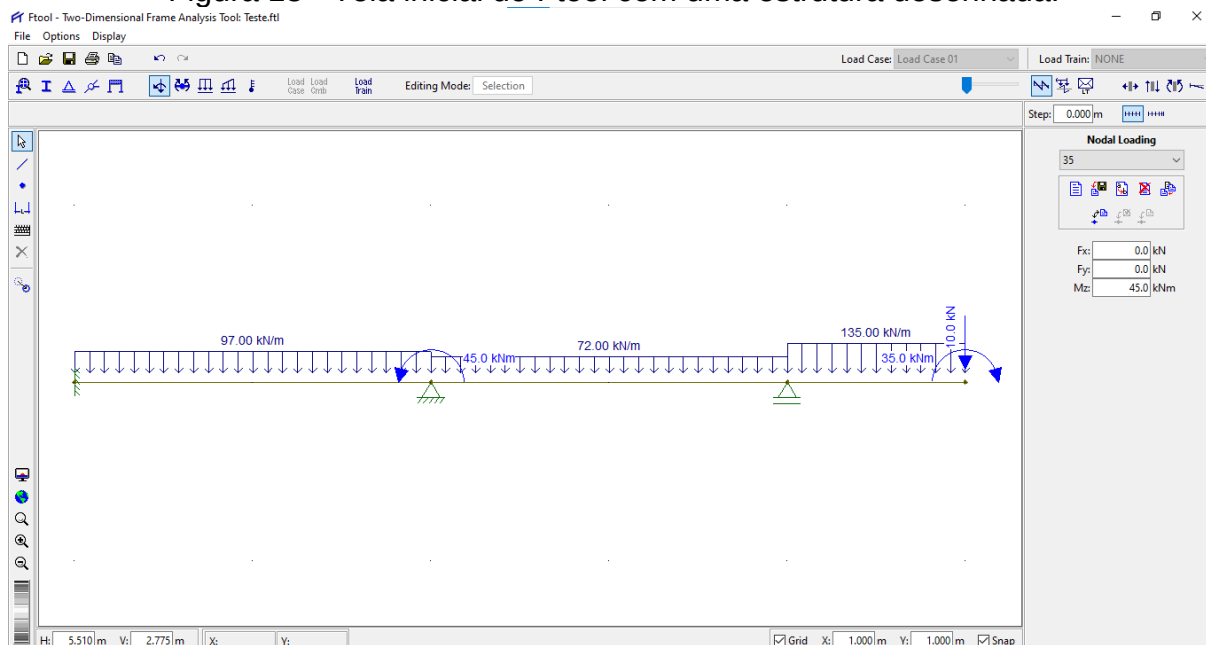
No ramo da Engenharia Civil, há vários programas disponibilizados pelo mercado que realizam cálculos de estruturas. No entanto, como citado anteriormente, não é comum o detalhamento do passo a passo do memorial de cálculos completo. A seguir são elencados alguns programas dentro da área de resolução do módulo de programa apresentado neste trabalho.

2.3.1 FTOOL

O Ftool, de Martha (2017), é um *software* que realiza análise de estruturas lineares planas por meio do método de elementos finitos. Por ser desenvolvido na PUC-RIO por Luis Fernando Martha, seu intuito é servir como *software* educacional. Porém, devido ao seu desempenho, o *software* também é amplamente utilizado por profissionais de Engenharia Civil.

As análises apresentadas no *software* exibem relatórios gráficos de deslocamentos, momento fletor, forças axiais e esforços cortantes. Além disso, ele possui uma biblioteca de perfis – contendo, inclusive, bitolas da Gerdau, que são muito aplicadas no país. Entretanto o *software* não realiza o dimensionamento. Ademais, o Ftool também não apresenta o relatório de desenvolvimento de cálculos do Método dos Elementos Finitos. Na Figura 13, apresenta-se a tela inicial do Ftool com uma estrutura desenhada.

Figura 13 - Tela inicial do Ftool com uma estrutura desenhada.



Fonte: Ftool, de Martha (2017).

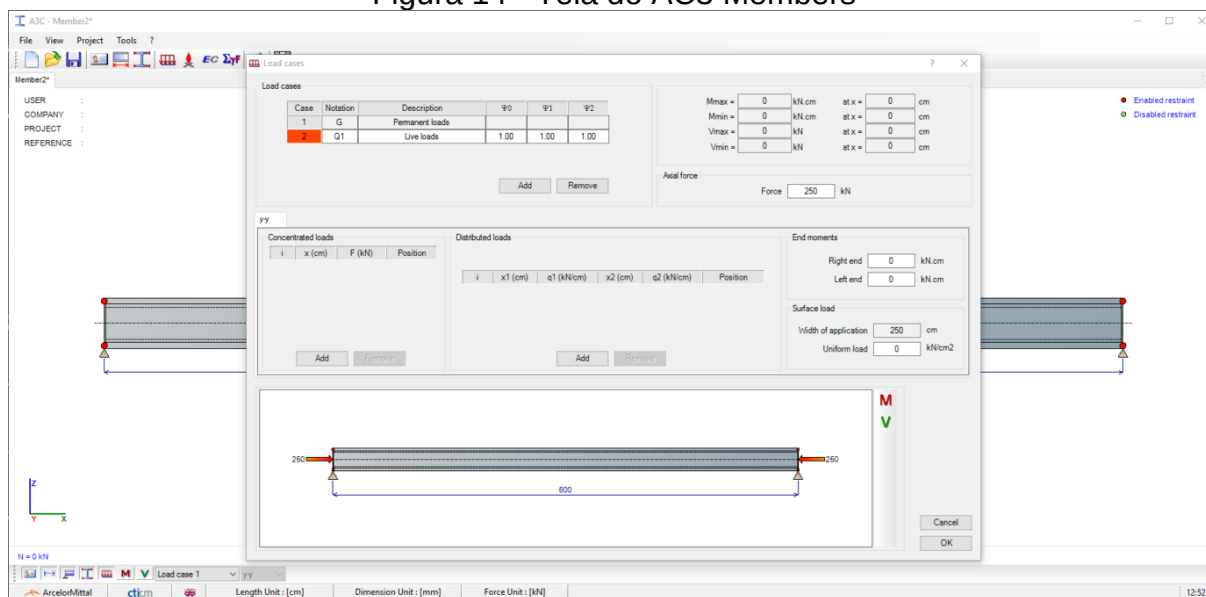
2.3.2 A3C MEMBERS

O A3C Members, segundo AECweb(2021), desenvolvido pela CTICM (*Centre Technique Industriel de la Construction Métallique*), é um programa utilizado para fazer análise e o dimensionamento de barras simples metálicas submetidas a esforços

distribuídos ou pontuais. Esse programa utiliza como base as normas do Eurocódigo 3, que possuem algumas diferenças em relação à norma NBR 8800.

O *software* não mostra relatório detalhado de cálculos e nem a metodologia, mas apenas apresenta os resultados da análise realizada.

Figura 14 - Tela do AC3 Members



Fonte: O Calculista de Aço (2017)

2.3.3 CALCULADORA DE VIGAS *ONLINE* PARA ESFORÇOS ELÁSTICOS

Segundo ENGIOBRA [entre 2013 e 2019], o programa foi desenvolvido pelo engenheiro Ricardo Rodrigues e consiste em uma calculadora, disponibilizada gratuitamente *on-line*, que possibilita ao usuário calcular os esforços elásticos contidos em uma viga com o limite de 3 combinações de vinculação: biapoada, biengastada ou engastada-apoiada. Não há a possibilidade de o usuário desenhar uma estrutura livremente, mas há apenas a possibilidade de que haja a inserção de dados com limites predeterminados pelo próprio *software*.

Figura 15 - Tela de inserção de dados da calculadora *online* – Exemplo inicial

Condições de Apoio*

Encastrada - Encastrada

Tipo de Carga*

Caso 1

L (m)

5

q (kN/m)

3,5

CALCULAR

Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o *software*.

O *software*, conforme a Figura 16, não apresenta os diagramas de esforços nem possibilita gerar relatório, mas apresenta apenas as reações de apoio e máximo esforço de momento fletor.

Figura 16 - Tela de resultados para os dados da Figura 15

Resultados do cálculo

M1 - Momento fletor no apoio 1

-7.29166666666667kN.m

M2 - Momento fletor no apoio 2

-7.29166666666667kN.m

Mmáx - Momento fletor no máximo

3.64583333333333kN.m

R1 - Reação no Apoio 1

8.75kN

R2 - Reação no Apoio 2

8.75kN

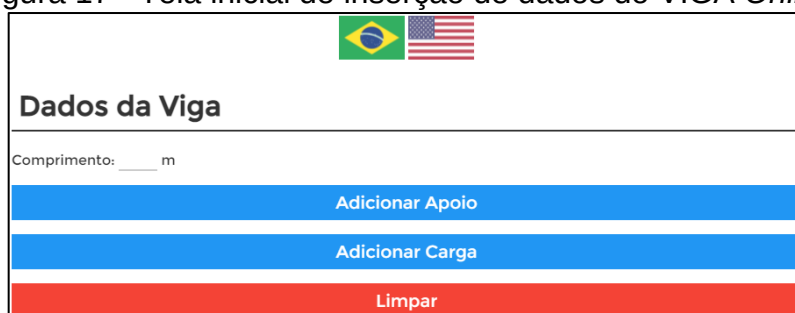
Voltar

Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o *software*.

2.3.4 VIGA ONLINE

O VIGA Online é um *software* desenvolvido pela equipe do site Aprender Engenharia [201-] e é disponibilizado gratuitamente *on-line*. Esse programa permite a realização de cálculos das reações de apoio, do esforço cortante e do momento fletor de vigas isostáticas. Nas Figuras 17 a 20, apresenta-se um exemplo de análise de viga utilizando o programa.

Figura 17 - Tela inicial de inserção de dados do VIGA Online



Dados da Viga

Comprimento: ___ m

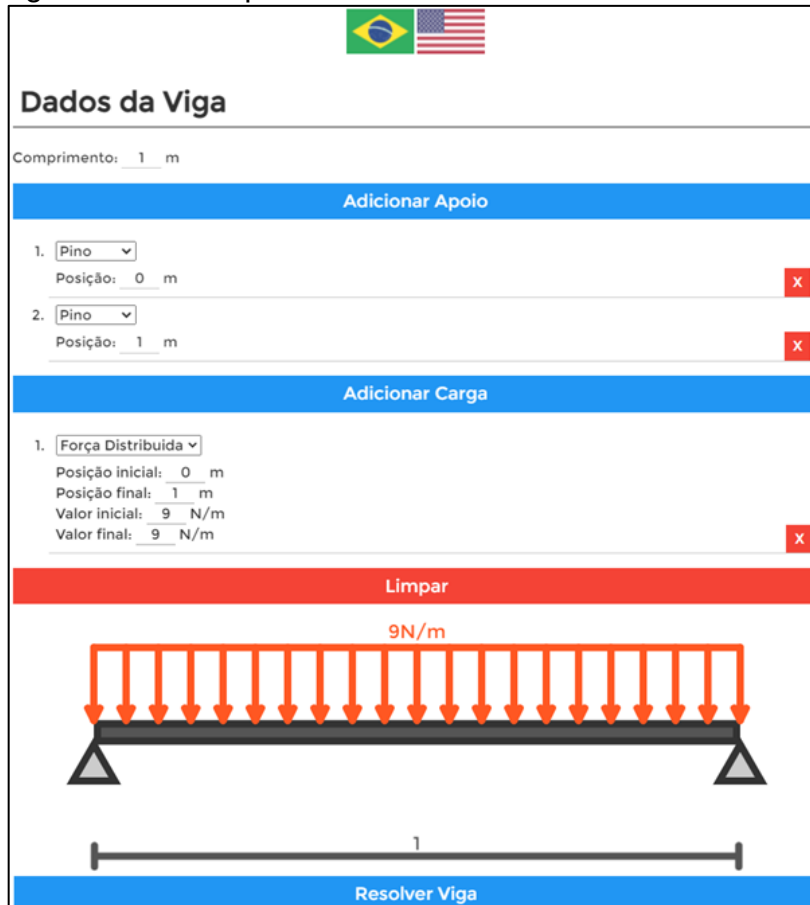
Adicionar Apoio

Adicionar Carga

Limpar

Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o *software*.

Figura 18 - Exemplo de estrutura isostática a ser calculada



Dados da Viga

Comprimento: 1 m

Adicionar Apoio

1. Pino
Posição: 0 m

2. Pino
Posição: 1 m

Adicionar Carga

1. Força Distribuída
Posição inicial: 0 m
Posição final: 1 m
Valor inicial: 9 N/m
Valor final: 9 N/m

Limpar

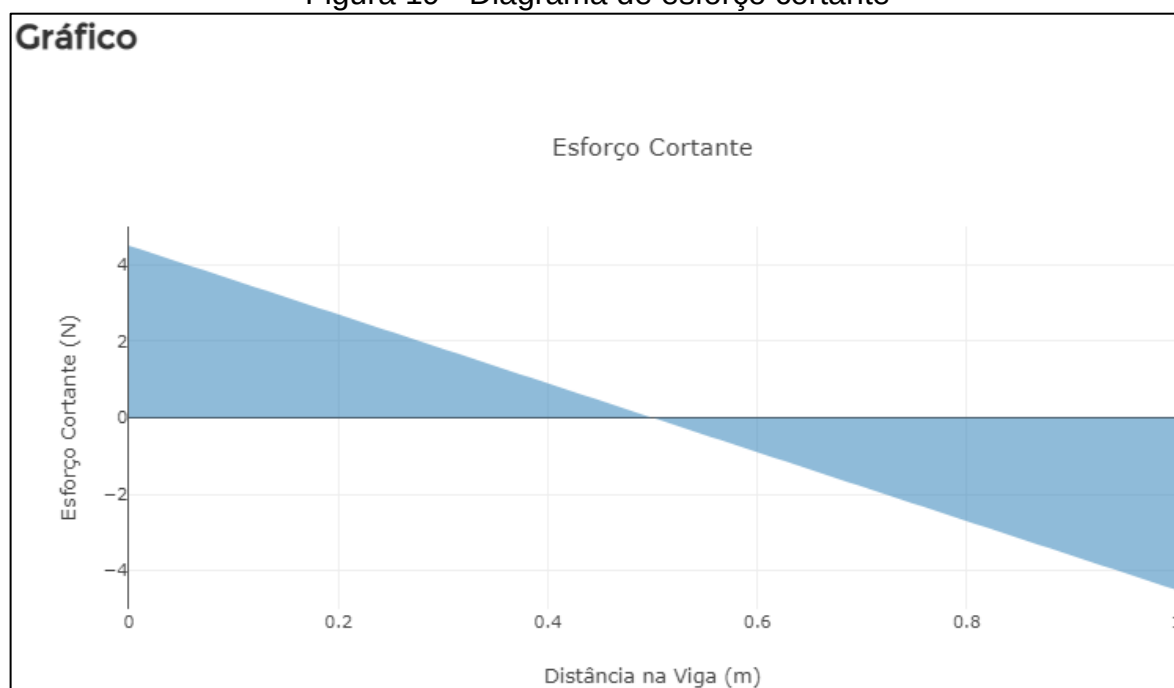
9N/m

1

Resolver Viga

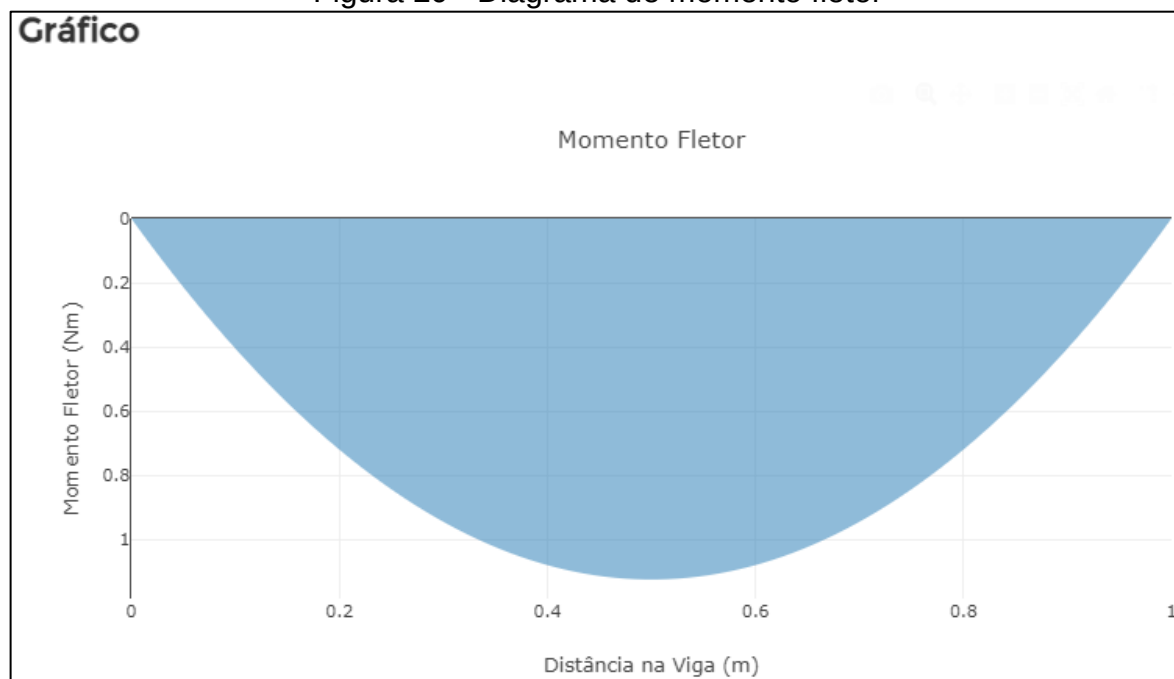
Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o *software*.

Figura 19 - Diagrama de esforço cortante



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o *software*

Figura 20 - Diagrama de momento fletor



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o *software*

3 METODOLOGIA

Considerando-se "viga" como um elemento estrutural linear horizontal submetido ao esforço físico de flexão, neste trabalho, para as ações, são contempladas cargas pontuais, distribuídas e momentos concentrados. Não obstante, também são válidas combinações entre elas.

Este trabalho insere-se como um módulo do programa IFESTRUT, que é um *software on-line* de base CAD já existente criado por Santos Junior, Lopes e Nirschl (2016); nele é que são desenhados a viga, os vínculos e as cargas. Após os desenhos, são processados os cálculos escolhendo o módulo conveniente. Na elaboração do módulo aqui apresentado, a edição do código é dividida em três etapas, o que visa à facilitação da programação.

Primeiramente, foi criada a interface de saída do módulo. Para a interface de saída dos dados utilizou-se a linguagem HTML, que pode ser estudada em W3schools (1998), no padrão da interface do programa base IFESTRUT - disponibilizado de modo *on-line*. Para a implantação dos algoritmos de cálculos, foi usada a linguagem *JavaScript*, explicitada na seção 2.2.2, e, finalmente, para a geração do relatório PDF, o código foi criado utilizando-se a biblioteca de funções *JavaScript* PDFmake (2021).

Os códigos dessas três etapas foram desenvolvidos no Notepad++, disponível em Ho (2021), um programa gratuito. A última etapa foi a fase de testes, para a qual foi usado o navegador de internet Google Chrome. Os testes visaram a abranger o maior número possível de combinações entre ações e vínculos a fim de pôr em prova a teoria apresentada.

A fim de validar o módulo aqui desenvolvido, optou-se por realizar a conferência dos diagramas de esforços com o supracitado *software* Ftool.

4 RESULTADOS

4.1 PROGRAMA BASE: IFESTRUT

O IFESTRUT¹, que é um programa que possui uma área com comandos tipo “CAD”, está disponibilizado *on-line* e possibilita o desenho de qualquer estrutura linear com carregamentos e vínculos. O IFESTRUT foi criado por Santos Junior, Lopes e Nirschl (2016) dentro do grupo de pesquisa NEVE, do qual este trabalho faz parte, e foi usado para abarcar o módulo desenvolvido e apresentado neste trabalho.

É na área de desenho (Figura 21) que o usuário desenha a estrutura bem como suas peculiaridades: arquétipo, comprimentos, ações, vínculos e características físicas (Módulo de Elasticidade, Momento de Inércia e Área da Seção Transversal):

Figura 21 - Interface do IFESTRUT



Fonte: O próprio autor utilizando o programa desenvolvido.

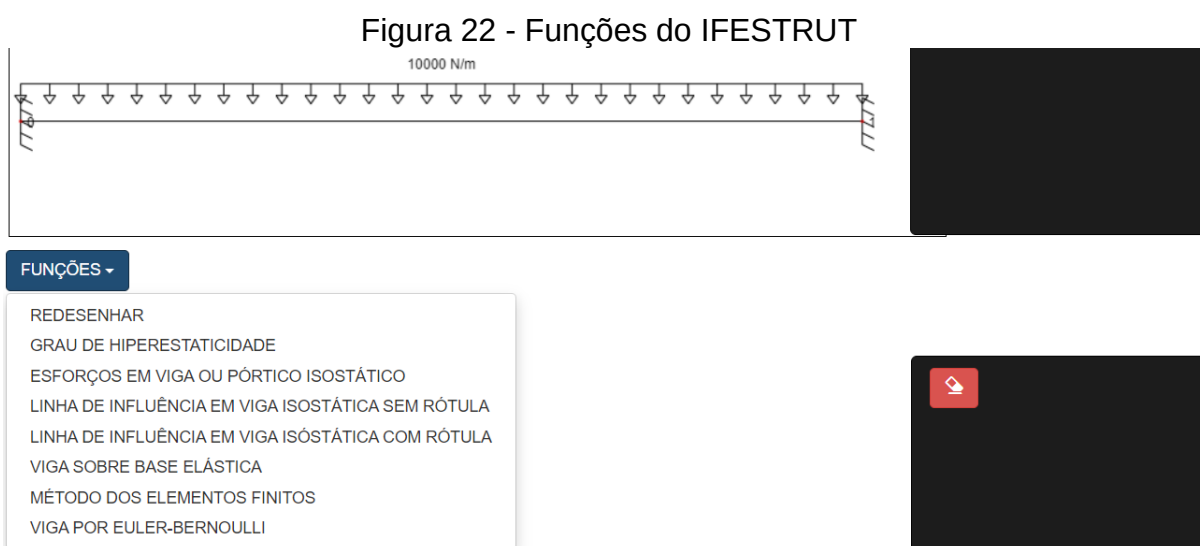
¹ Disponível em Núcleo de Engenharia Virtual [2016].

A inserção das estruturas pode ocorrer de duas maneiras distintas: desenhando-a na tela em branco ou inserindo um arquivo previamente pronto clicando no botão ABRIR (Figura 21).

O desenho da estrutura se dá configurando as características físicas das barras (à direita, na Figura 21) e, feito isso, clicando no botão com o símbolo de lápis e determinando os comprimentos das barras.

A determinação do comprimento das barras é feita, inicialmente, clicando na área do desenho, então aparecerá o primeiro ponto (nó 0). Posteriormente, para o desenho dos próximos nós, irá aparecer, ao lado do botão “VÍNCULO”, uma caixa de texto para escrever as suas coordenadas relativas (em que o ponto é o separador decimal). Não obstante, o usuário pode optar por clicar num segundo ponto diretamente na tela.

Após isso, é feita a inserção dos vínculos por meio do botão “VÍNCULO”, em que estão disponíveis os diferentes tipos a serem escolhidos pelo usuário. Por conseguinte, após os vínculos, faz-se a inserção das ações sob as quais a estrutura está submetida – elas se encontram no ícone “AÇÕES”. Por fim, conforme o exemplo da Figura 20, a estrutura está pronta para ser calculada – restando apenas clicar no botão “FUNÇÕES” ao final da página e escolher a opção “VIGA POR EULER”, o módulo aqui apresentado, conforme a Figura 22 a seguir:



Fonte: O próprio autor utilizando o programa desenvolvido.

Nota-se a presença de outros botões – apresentados na Figura 21 - que podem ser usados na tela de desenho, são eles: “Exibir tudo” (para mostrar a estrutura

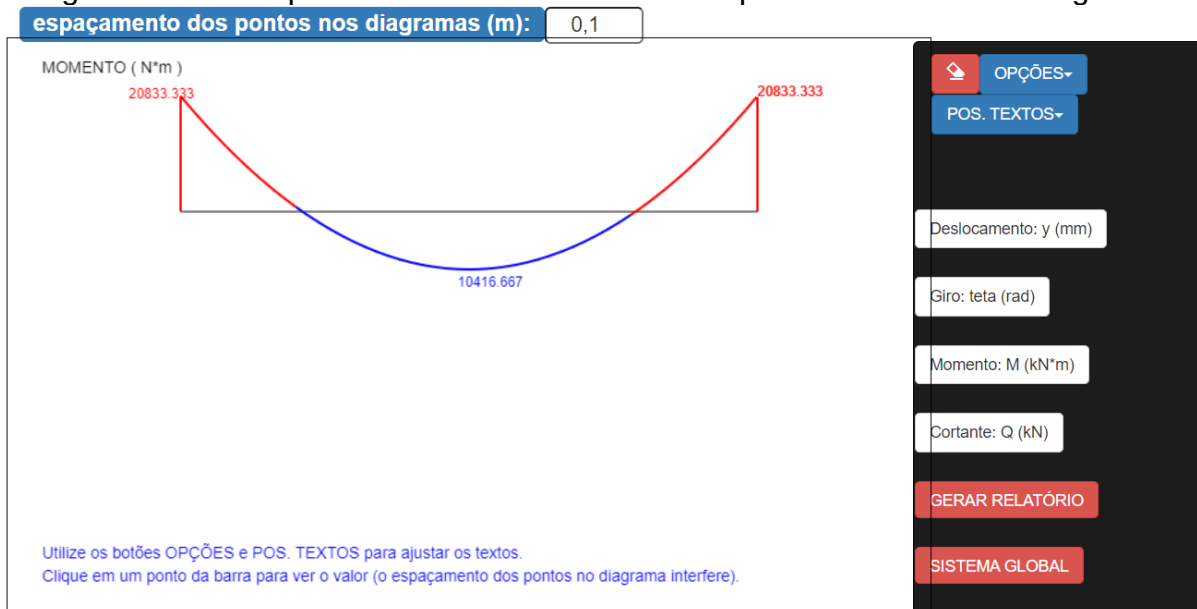
toda na tela), “Zoom +” e “Zoom -” (para dar zoom na tela), “Pan” (para movimentar a vista da estrutura), “OPÇÕES” (para alterar o tamanho da letra das propriedades das barras), e “Apagar tudo” (para limpar a tela).

4.2 MÓDULO DE VIGAS POR EULER-BERNOULLI (OBJETO DESTES TRABALHO)

Tendo a entrada gráfica do IFESTRUT fornecido todos os dados de entrada e o usuário clicado na função VIGA POR EULER, todos os cálculos foram programados em *JavaScript* conforme a teoria apresentada na revisão bibliográfica e os fluxogramas do item 4.3. O programa realiza diversas etapas de cálculos internamente antes de apresentar os resultados em forma de gráficos, de acordo com o explicado na metodologia deste trabalho.

Conforme a Figura 23, de imediato aparece o diagrama de momento fletor da estrutura e, ao lado, estão, além do botão do momento fletor, mais três botões referentes ao esforço cortante, ao giro e ao deslocamento da estrutura.

Figura 23 – Exemplo da tela com os resultados a partir da estrutura da Figura 21



Fonte: O próprio autor utilizando o programa desenvolvido.

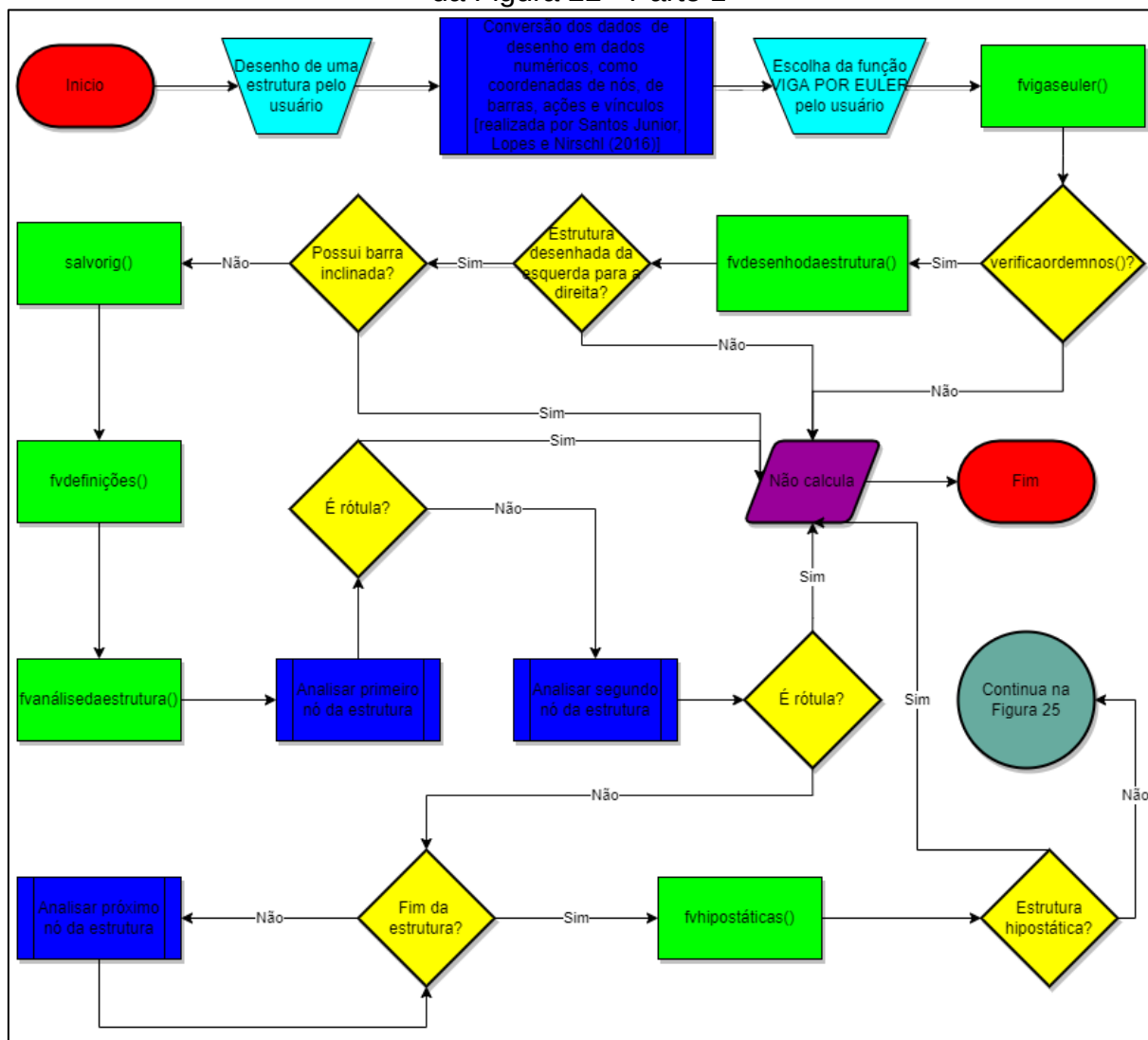
Ao clicar nos botões brancos, aparecem os diagramas correspondentes e, ao clicar no botão vermelho, “GERAR RELATÓRIO”, abaixo dos brancos, é gerado um relatório de estudo – que é o propósito principal deste trabalho. Além desse botão, há outro por nome “SISTEMA GLOBAL”, por meio do qual o usuário pode obter um

arquivo .txt da tabela que contém toda a matriz aumentada do sistema global calculado.

4.3 FLUXOGRAMAS DOS ALGORITMOS IMPLEMENTADOS

Apresenta-se, nas Figuras 24 a 30, os fluxogramas dos algoritmos implementados no módulo de programa apresentado neste trabalho. Após as referidas figuras, faz-se uma breve descrição de cada função contida nos fluxogramas. Ressalta-se que, a partir da escolha da função VIGA POR EULER, todas as rotinas e sub-rotinas foram desenvolvidas neste trabalho.

Figura 24 - Fluxograma – após clique na função VIGAS POR "EULER-BERNOULLI" da Figura 22 - Parte 1



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Em que:

fvigaseuler(): função inicial;

verificaordemnos(): função que verifica se a estrutura foi desenhada com nós em sequência da esquerda para a direita.

fvdesenhodaestrutura(): função que avalia se a estrutura foi desenhada da esquerda para a direita;

salvorig(): função que salva o desenho feito pelo usuário;

fvdefinições(): função que determina uma gama de variáveis que serão utilizadas durante a execução do algoritmo. Dentre essas variáveis encontram-se:

fv: que cria um vetor das constantes de integração da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli;

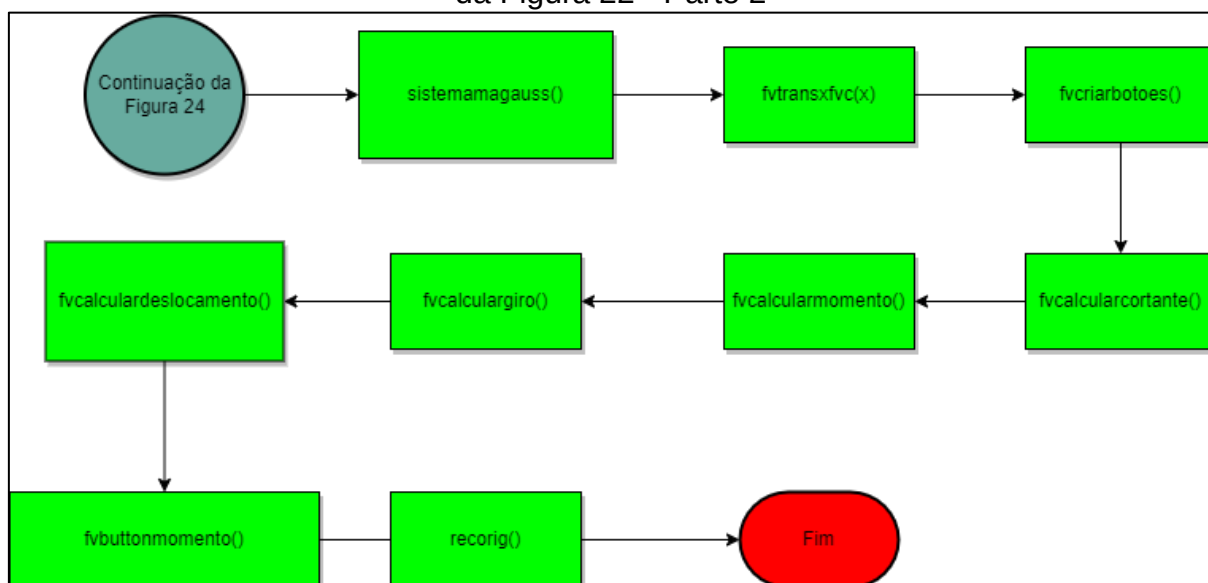
nba: em que nba é um contador do número de barras que há na estrutura desenhada;

$n = 4 * nba$; em que “n” é a variável que determina a ordem do sistema global;

fvanálisedaestrutura(): função que analisa todos os nós da estrutura, um por um - da esquerda para a direita - e identifica e organiza quais são os vínculos, as ações e as características geométricas da barra;

fvhipostáticas(): função que analisa se a estrutura é hipostática ou não.

Figura 25 - Fluxograma – Após clique na função “VIGAS POR EULER-BERNOULLI” da Figura 22 - Parte 2



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Em que:

sistemagauss(): função que utiliza as condições de contorno levantadas pela função `fvanálisedaestrutura()` e faz a montagem do sistema matricial e calcula sua solução. O sistema de equações lineares global encontrado é resolvido pelo Método de Gauss, cuja teoria utilizada encontra-se, por exemplo, em Rugiero e Lopes (1996); O algoritmo utilizado foi o de Parra (2015), pesquisadora do grupo NEV, ao qual este trabalho está vinculado.

fvtransxfvc(x): transforma os valores apresentados pelo vetor solução da função `sistemagauss()` nas constantes de integração (já apresentadas neste trabalho) da teoria de vigas de Euler-Bernoulli;

fvcriarbotoes(): cria, na tela do IFESTRUT, os botões para que o usuário possa acessar os diagramas calculados pelo módulo desenvolvido;

fvcalcularcortante(): calcula o diagrama do esforço cortante por meio das constantes que foram transformadas pela função `fvtransxfvc(x)`;

fvcalcularmomento(): calcula o diagrama do momento fletor por meio das constantes que foram transformadas pela função `fvtransxfvc(x)`;

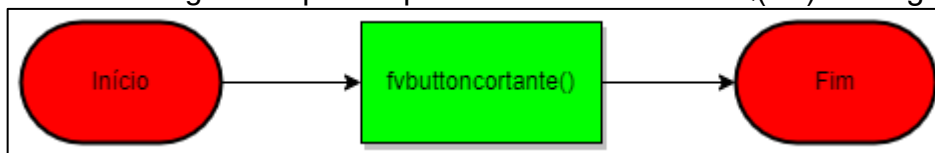
fvcalculargiro(): calcula o diagrama do giro da estrutura por meio das constantes que foram transformadas pela função `fvtransxfvc(x)`;

fvcalculardeslocamento(): calcula o diagrama do deslocamento da estrutura através das constantes que foram transformadas pela função `fvtransxfvc(x)`;

fvbuttonmomento(): ativa o diagrama de momento fletor na tela do usuário. Esse diagrama é o primeiro a ser mostrado quando o programa realiza o cálculo da estrutura;

recorig(): Recupera todos os dados do desenho original da estrutura.

Figura 26 - Fluxograma após clique no botão “Cortante Q(kN)” da Figura 23

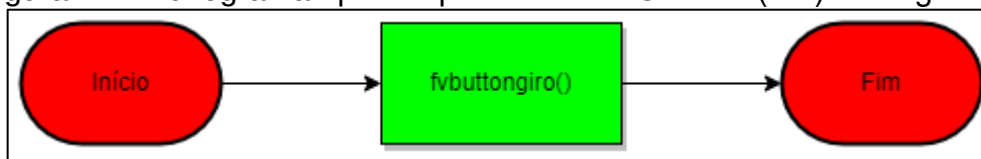


Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Em que:

fvbuttoncortante(): mostra o diagrama de esforço cortante na tela do usuário.

Figura 27 - Fluxograma após clique no botão “Giro teta(rad)” da Figura 23

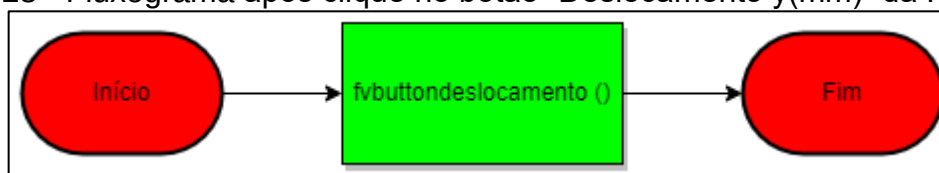


Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Em que:

fvbuttongiro(): mostra o diagrama de giro na tela do usuário.

Figura 28 - Fluxograma após clique no botão “Deslocamento y(mm)” da Figura 23

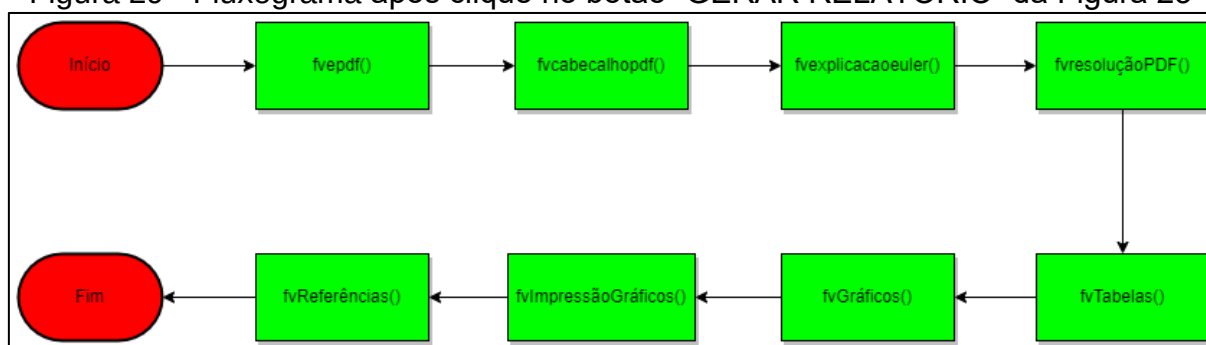


Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Em que:

fvbuttondeslocamento(): mostra o diagrama de deslocamento na tela do usuário.

Figura 29 - Fluxograma após clique no botão “GERAR RELATÓRIO” da Figura 23



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Em que:

fvepdf(): ao clicar no botão GERAR RELATÓRIO, essa função abre – em outra página – o relatório em PDF do passo a passo de cálculo da estrutura desenhada ou inserida;

fvcabecalhopdf(): função que gera um cabeçalho no relatório em PDF com algumas informações acerca do desenvolvimento do módulo aqui apresentado;

fvexplicacao euler(): função que introduz no relatório uma breve explicação acerca da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli;

fvresoluçãoPDF(): função que apresenta no relatório o desenvolvimento do passo a passo de cálculo que foi realizado para o cálculo da estrutura analisada;

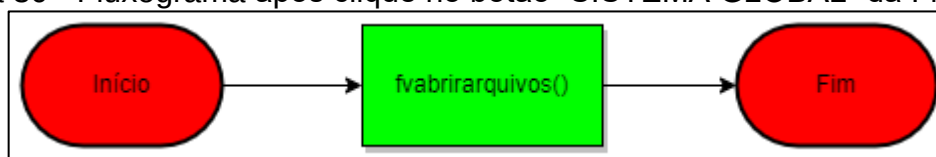
fvTabelas(): função que imprime no relatório a tabela do sistema global que foi montado para o cálculo dos diagramas de esforços;

fvGráficos(): função que apresenta um texto de introdução dos gráficos no relatório;

fvImpressãoGráficos(): função que imprime os diagramas dos esforços no relatório;

fvReferências(): função que apresenta no relatório as referências bibliográficas.

Figura 30 - Fluxograma após clique no botão “SISTEMA GLOBAL” da Figura 23



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Em que:

fvabrirarquivos(): função que gera o download do sistema global (em arquivo .txt).

4.4 RELATÓRIOS GERADOS E VALIDAÇÃO DO MÓDULO DE PROGRAMA

Como exemplo de relatório PDF gerado, segue, na Figura 31, o documento gerado para a estrutura do exemplo 1 mostrado no item 2.1.1.1.

Figura 31 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 1

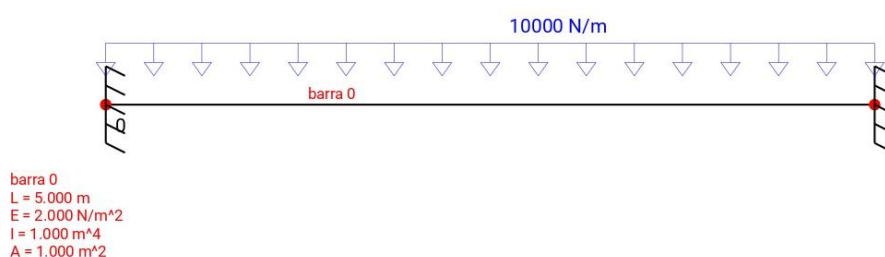
TO TRANSLATE THIS DOCUMENT, DOWNLOAD THE PDF REPORT AND TRANSLATE ON <https://www.onlinedoctranslator.com/pt/> (FREE - GENERATE COMPLETE PDF TRANSLATED FILE) OR TRANSLATE ON <https://translate.google.com/> (SELECT DOCUMENTS - FREE - BUT ONLY TRANSLATE TEXT)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Voluporanga

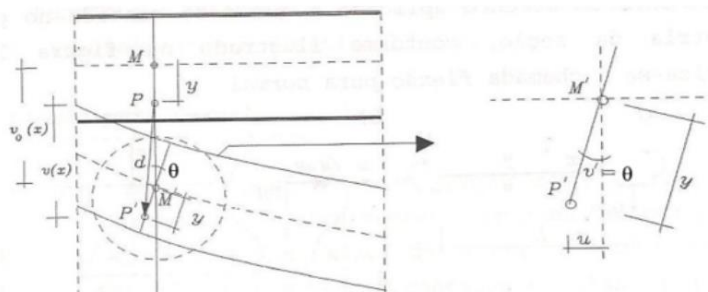
NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
Título: Vigas - Método de Euler-Bernoulli
Autor: Alex Sandro Silva Coelho
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
Tipo: Iniciação Científica com Bolsa Institucional/TCC
Curso: Engenharia Civil
Data da versão original: 30/11/2020
Data da última atualização: 08/12/2021
Data da geração do relatório: 10/12/2021

A estrutura a calcular é a seguinte:



Será desenvolvido aqui o Método da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, conforme Proença (2003). O modelo proposto supõe que o movimento de deformação que ocorre em uma viga submetida à flexão não altera a geometria das seções, que são planas originalmente (seção que passa por M e P na figura 1); ou seja, essas seções continuarão a ser planas e ortogonais ao eixo da viga mesmo após estarem deformadas (seção que passa por M' e P' da figura 1), não importando a distância longitudinal da extremidade.

Figura 1 - Deformação de viga no modelo de Euler-Bernoulli.



Fonte: Adaptado de Proença (2003, p. 98)

Após o desenvolvimento matemático, partir das hipóteses acima, da Lei de Hooke, do equilíbrio de forças e momentos e da limitação do problema a pequenos deslocamentos, Proença (2003), para cada trecho de viga delimitado pela continuidade das funções dos esforços e deslocamentos, chega a:

INTEGRAL →

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p \quad \frac{dM}{dx} = Q \quad M = E \cdot I \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad \theta = E \cdot I \cdot \frac{dv(x)}{dx} \quad E \cdot I \cdot v(x)$$

p (ação distribuída) Q (cortante) M (momento fletor) θ (giro) v (deslocamento)

← DERIVADA

Conforme Proença (2003), quando houver alterações ou descontinuidade das funções $q(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $v(x)$ ou $\theta(x)$, a viga deverá ser dividida em trechos. Posto isso, os casos mais comuns decorrentes são:

- Apoios intermediários;
- Ação (força ou momento) concentrada;
- Variação da rigidez à flexão.

Sendo assim, cada trecho de viga terá o equacionamento, sendo as constantes C_1 a C_4 determinadas em função das condições de contorno do trecho:

$$\text{Cortante: } Q(x) = -p \cdot x + C_1$$

$$\text{Momento Fletor: } M(x) = -\left(\frac{p \cdot x^2}{2}\right) + C_1 \cdot x + C_2$$

$$\text{Giro: } E \cdot I \cdot \theta(x) = -\left(\frac{p \cdot x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_1 \cdot x^2}{2}\right) + C_2 \cdot x + C_3$$

$$\text{Deslocamento: } E \cdot I \cdot v(x) = -\left(\frac{p \cdot x^4}{24}\right) + \left(\frac{C_1 \cdot x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_2 \cdot x^2}{2}\right) + C_3 \cdot x + C_4$$

Ao final, portanto, haverá um sistema de equações para determinar as constantes C_1 a C_4 de cada trecho

ATENÇÃO: A PARTIR DAQUI, O PROGRAMA INTERNAMENTE TRABALHA NO SISTEMA kN-m.

Abaixo segue a resolução.

A ordem do sistema é ($4 \times n^\circ$ de trechos): 4

Barra 0 - Nós(0 - 1)

Módulo de Elasticidade (E): 0.00200kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 5.000m

Condições de Contorno

As condições de contorno que serão aplicadas para a resolução dos cálculos posteriores são adotadas conforme o tipo de apoio que o nó apresenta: móvel, fixo, engaste, rótula ou livre. Ademais, elas mudam se os apoios forem nas extremidades ou internos (para o caso de mais de uma barra na estrutura). Posto isso, abaixo têm-se o detalhamento das características de cada condição de contorno conforme o tipo de

apoio.

Para os apoios que se encontram nas extremidades da estrutura, as equações de condições de contorno são mais simples. Logo, usa-se:

Obs: será utilizada a letra P para força e M para momento concentrado.

Apoio Móvel:

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Apoio Fixo:

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Engaste:

$$\theta(x) = 0 \rightarrow -q \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x/E \cdot I + C3/E \cdot I = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Livre:

$$Q(x) = P \rightarrow -P - q \cdot x + C1 = 0$$

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

Rótula: Não é possível haver rótulas nas extremidades de uma estrutura

Para os apoios que se encontram internamente na estrutura, as equações de compatibilização dos trechos abordam mais características. Desse modo, tem-se que:

Obs: será utilizada a letra "e" para lado esquerdo do ponto e "d" para lado direito.

Apoio Móvel:

$$M_e(x_e) - M_d(x_d) = M \rightarrow (-q_e \cdot x_e^2/2 + C1_e \cdot x_e + C2_e) - (-q_d \cdot x_d^2/2 + C1_d \cdot x_d + C2_d) = M$$

$$\theta_e(x_e) = \theta_d(x_d) \rightarrow -q_e \cdot x_e^3/6 \cdot E \cdot I_e + C1_e \cdot x_e^2/2 \cdot E \cdot I_e + C2_e \cdot x_e/E \cdot I_e + C3_e/E \cdot I_e = -q_d \cdot x_d^3/6 \cdot E \cdot I_d + C1_d \cdot x_d^2/2 \cdot E \cdot I_d + C2_d \cdot x_d/E \cdot I_d + C3_d/E \cdot I_d$$

$$v_e(x_e) = 0 \rightarrow -q_e \cdot (x_e^4)/24 \cdot E \cdot I_e + C1_e \cdot x_e^3/6 \cdot E \cdot I_e + C2_e \cdot x_e^2/2 \cdot E \cdot I_e + C3_e \cdot x_e/E \cdot I_e + C4_e/E \cdot I_e = 0$$

$$v_d(x_d) = 0 \rightarrow -q_d \cdot (x_d^4)/24 \cdot E \cdot I_d + C1_d \cdot x_d^3/6 \cdot E \cdot I_d + C2_d \cdot x_d^2/2 \cdot E \cdot I_d + C3_d \cdot x_d/E \cdot I_d + C4_d/E \cdot I_d = 0$$

Apoio Fixo:

$$M_e(x_e) - M_d(x_d) = M \rightarrow (-q_e \cdot x_e^2/2 + C1_e \cdot x_e + C2_e) - (-q_d \cdot x_d^2/2 + C1_d \cdot x_d + C2_d) = M$$

$$\theta_e(x_e) = \theta_d(x_d) \rightarrow -q_e \cdot x_e^3/6 \cdot E \cdot I_e + C1_e \cdot x_e^2/2 \cdot E \cdot I_e + C2_e \cdot x_e/E \cdot I_e + C3_e/E \cdot I_e = -q_d \cdot x_d^3/6 \cdot E \cdot I_d + C1_d \cdot x_d^2/2 \cdot E \cdot I_d + C2_d \cdot x_d/E \cdot I_d + C3_d/E \cdot I_d$$

$$v_e(x_e) = 0 \rightarrow -q_e \cdot (x_e^4)/24 \cdot E \cdot I_e + C1_e \cdot x_e^3/6 \cdot E \cdot I_e + C2_e \cdot x_e^2/2 \cdot E \cdot I_e + C3_e \cdot x_e/E \cdot I_e + C4_e/E \cdot I_e = 0$$

$$v_d(x_d) = 0 \rightarrow -q_d \cdot (x_d^4)/24 \cdot E \cdot I_d + C1_d \cdot x_d^3/6 \cdot E \cdot I_d + C2_d \cdot x_d^2/2 \cdot E \cdot I_d + C3_d \cdot x_d/E \cdot I_d + C4_d/E \cdot I_d = 0$$

Engaste:

$$\begin{aligned}\theta e(xe) = 0 &\rightarrow -q_e x_e^3 / 6 E_e I_e + C1 e x_e^2 / 2 E_e I_e + C2 e x_e / E_e I_e + C3 e / E_e I_e = 0 \\ \theta d(xd) = 0 &\rightarrow -q_d x_d^3 / 6 E_d I_d + C1 d x_d^2 / 2 E_d I_d + C2 d x_d / E_d I_d + C3 d / E_d I_d = 0 \\ v e(xe) = 0 &\rightarrow -q_e (x_e^4) / 24 E_e I_e + C1 e x_e^3 / 6 E_e I_e + C2 e x_e^2 / 2 E_e I_e + C3 e x_e / E_e I_e + C4 e / E_e I_e = 0 \\ v d(xd) = 0 &\rightarrow -q_d (x_d^4) / 24 E_d I_d + C1 d x_d^3 / 6 E_d I_d + C2 d x_d^2 / 2 E_d I_d + C3 d x_d / E_d I_d + C4 d / E_d I_d = 0\end{aligned}$$

Rótula:

$$\begin{aligned}Qe(xe) - Qd(xd) = P &\rightarrow (-q_e x_e + C1 e) - (-q_d x_d + C1 d) = P \\ Me(xe) = M &\rightarrow -M - q_e x_e^2 / 2 + C1 e x_e + C2 e = 0 \\ Md(xd) = M &\rightarrow -M - q_d x_d^2 / 2 + C1 d x_d + C2 d = 0 \\ ve(xe) = vd(xd) &\rightarrow -q_e (x_e^4) / 24 E_e I_e + C1 e x_e^3 / 6 E_e I_e + C2 e x_e^2 / 2 E_e I_e + C3 e x_e / E_e I_e + C4 e / E_e I_e = \\ &-q_d (x_d^4) / 24 E_d I_d + C1 d x_d^3 / 6 E_d I_d + C2 d x_d^2 / 2 E_d I_d + C3 d x_d / E_d I_d + C4 d / E_d I_d\end{aligned}$$

Livre:

$$\begin{aligned}Qe(xe) - Qd(xd) = P &\rightarrow (-q_e x_e + C1 e) - (-q_d x_d + C1 d) = P \\ Me(xe) - Md(xd) = M &\rightarrow (-q_e x_e^2 / 2 + C1 e x_e + C2 e) - (-q_d x_d^2 / 2 + C1 d x_d + C2 d) = M \\ \theta e(xe) = \theta d(xd) &\rightarrow -q_e x_e^3 / 6 E_e I_e + C1 e x_e^2 / 2 E_e I_e + C2 e x_e / E_e I_e + C3 e / E_e I_e = -q_d x_d^3 / 6 E_d I_d + \\ &C1 d x_d^2 / 2 E_d I_d + C2 d x_d / E_d I_d + C3 d / E_d I_d \\ ve(xe) = vd(xd) &\rightarrow -q_e (x_e^4) / 24 E_e I_e + C1 e x_e^3 / 6 E_e I_e + C2 e x_e^2 / 2 E_e I_e + C3 e x_e / E_e I_e + C4 e / E_e I_e = \\ &-q_d (x_d^4) / 24 E_d I_d + C1 d x_d^3 / 6 E_d I_d + C2 d x_d^2 / 2 E_d I_d + C3 d x_d / E_d I_d + C4 d / E_d I_d\end{aligned}$$

Haja vista os apoios da estrutura aqui relatada, as equações a serem utilizadas nos cálculos são:

Nó 0 - Condições de contorno para Engaste no primeiro nó:

Para $x = 0$

$$\text{Eq. 1: } \theta(x) = 0: -10.000 \cdot 0^3 / (6 \cdot 0.00200 \cdot 1.000) + C1 \cdot 0^2 / (2 \cdot 0.00200 \cdot 1.000) + C2 \cdot 0 / (0.00200 \cdot 1.000) + C3 / (0.00200 \cdot 1.000) = 0$$

$$\text{Eq. 2: } v(x) = 0: -10.000 \cdot (0^4) / (24 \cdot 0.00200 \cdot 1.000) + C1 \cdot 0^3 / (6 \cdot 0.00200 \cdot 1.000) + C2 \cdot 0^2 / (2 \cdot 0.00200 \cdot 1.000) + C3 \cdot 0 / (0.00200 \cdot 1.000) + C4 / (0.00200 \cdot 1.000) = 0$$

Nó 1 - Condições de contorno para Engaste no último nó:

Para $x = 5.000$

$$\text{Eq. 3: } \theta(x) = 0: -10.000 \cdot 5.000^3 / (6 \cdot 0.00200 \cdot 1.000) + C1 \cdot 5.000^2 / (2 \cdot 0.00200 \cdot 1.000) + C2 \cdot 5.000 / (0.00200 \cdot 1.000) + C3 / (0.00200 \cdot 1.000) = 0$$

$$\text{Eq. 4: } v(x) = 0: -10.000 \cdot (5.000^4) / (24 \cdot 0.00200 \cdot 1.000) + C1 \cdot 5.000^3 / (6 \cdot 0.00200 \cdot 1.000) + C2 \cdot 5.000^2 / (2 \cdot 0.00200 \cdot 1.000) + C3 \cdot 5.000 / (0.00200 \cdot 1.000) + C4 / (0.00200 \cdot 1.000) = 0$$

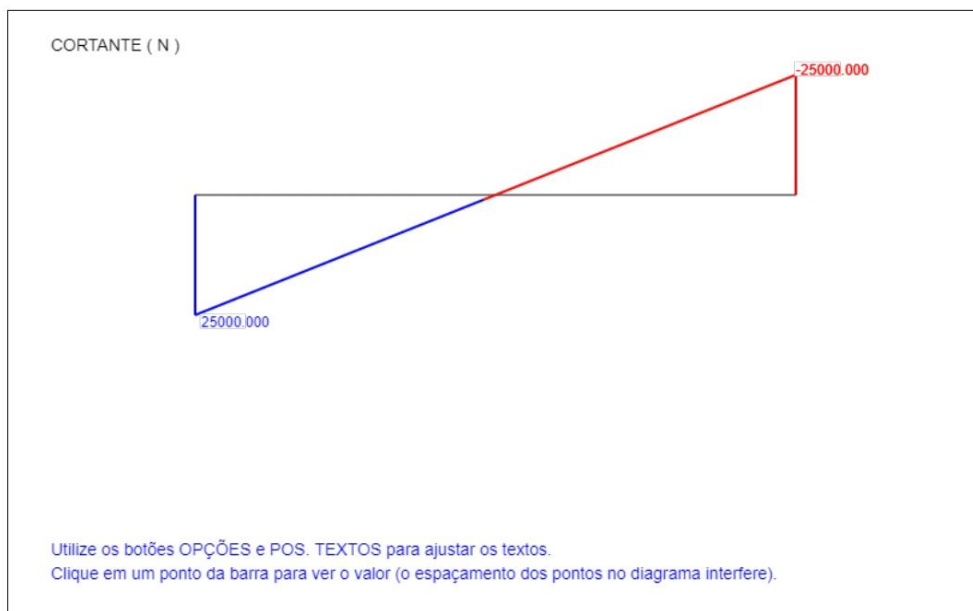
Montando as equações num sistema global matricial do tipo $A \cdot C = B$, temos:

Eq.	C1,0	C2,0	C3,0	C4,0	B
1	0.0000	0.0000	500.000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	500.000	0.0000
3	6250.000	2500.000	500.000	0.0000	104166.667
4	10416.667	6250.000	2500.000	500.000	130208.333

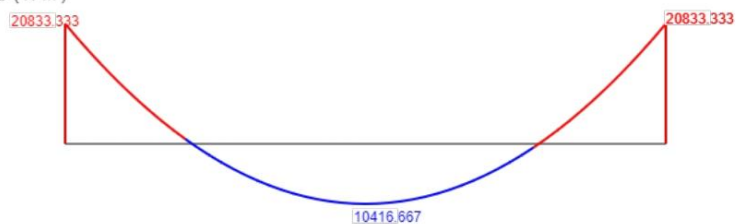
Resolvendo o sistema linear de equações pelo Método de Gauss (vide <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema->

gauss/sistemagauss.php?), encontram-se os valores das constantes C1 a C4 de cada trecho e, portando, as equações dos esforços de cada trecho (diagramas).

Abaixo seguem os diagramas (no sistema kN-m):



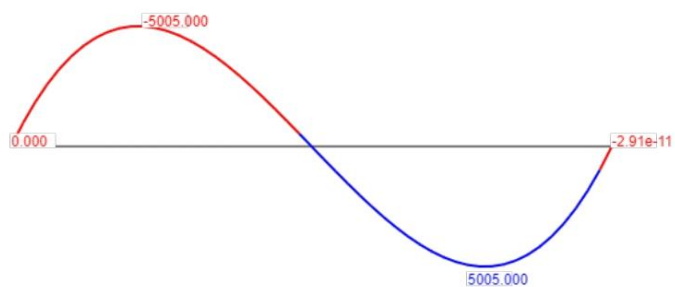
MOMENTO (N*m)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

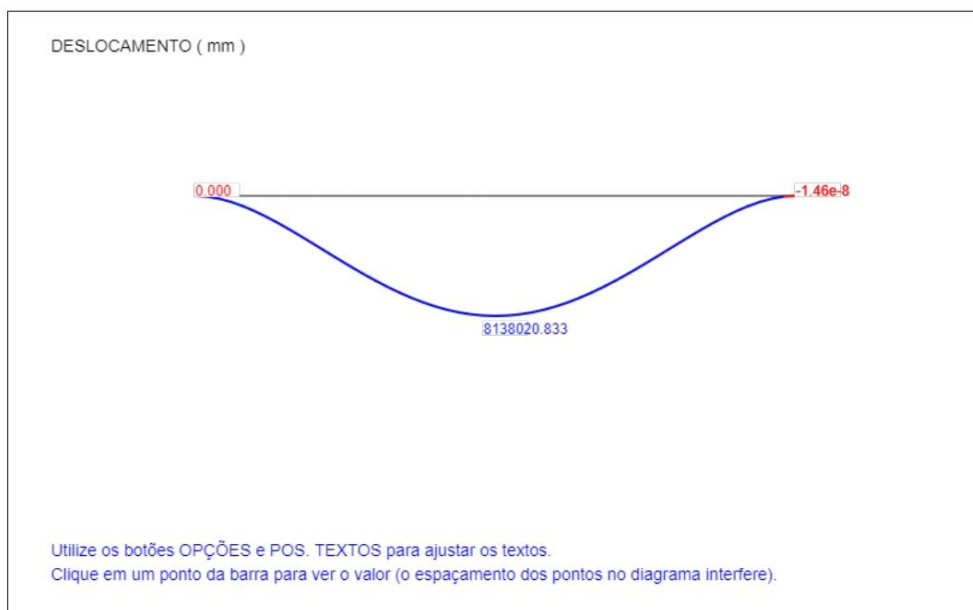
Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).

GIRO: (rad)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R.Jr. Resistência dos materiais. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2011.

BITTENCOURT, Marco Lúcio. CAPÍTULO 6: Viga. Unicamp, 2003. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em421/semII-1999/textos/viga.pdf>>. Acesso em: 23 jul. 2020.

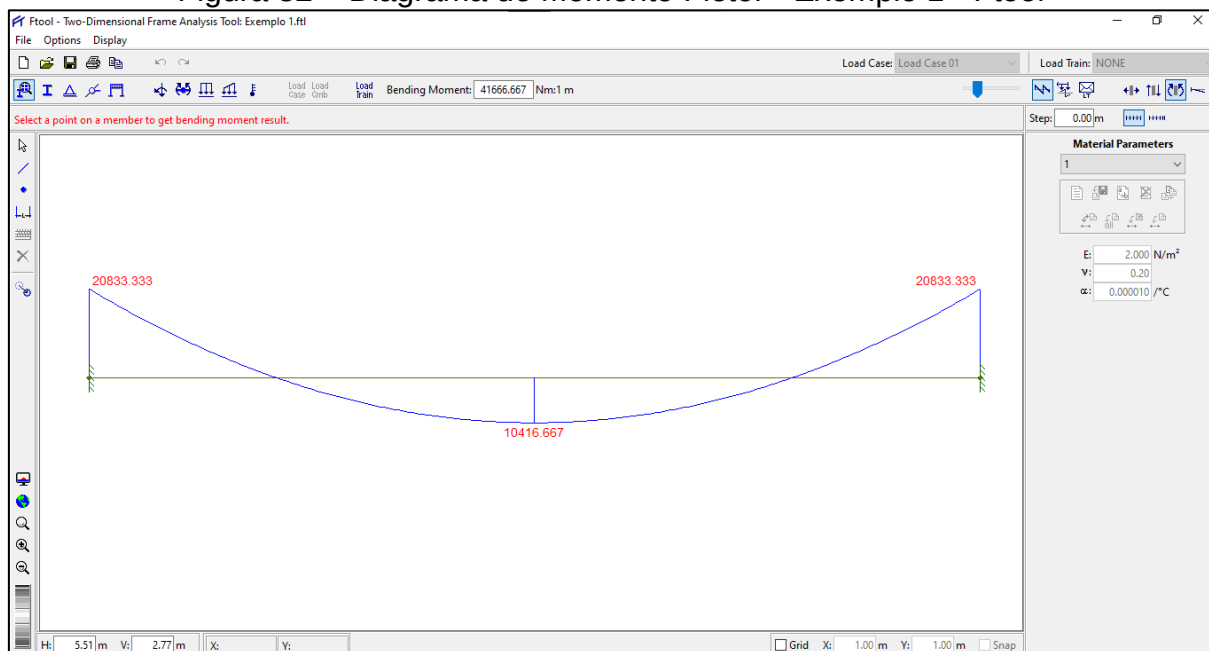
PROENÇA, Sergio Persival Baroncini Proença. Curso de resistência dos materiais. Notas de aula – vol. 1. São Carlos: USP, 2003.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do programa já disponível *on-line*.

Note que os diagramas gerados são exatamente os apresentados no exemplo 1 do item 2.1.1.1, observando-se que as convenções dos diagramas de cortante e giro

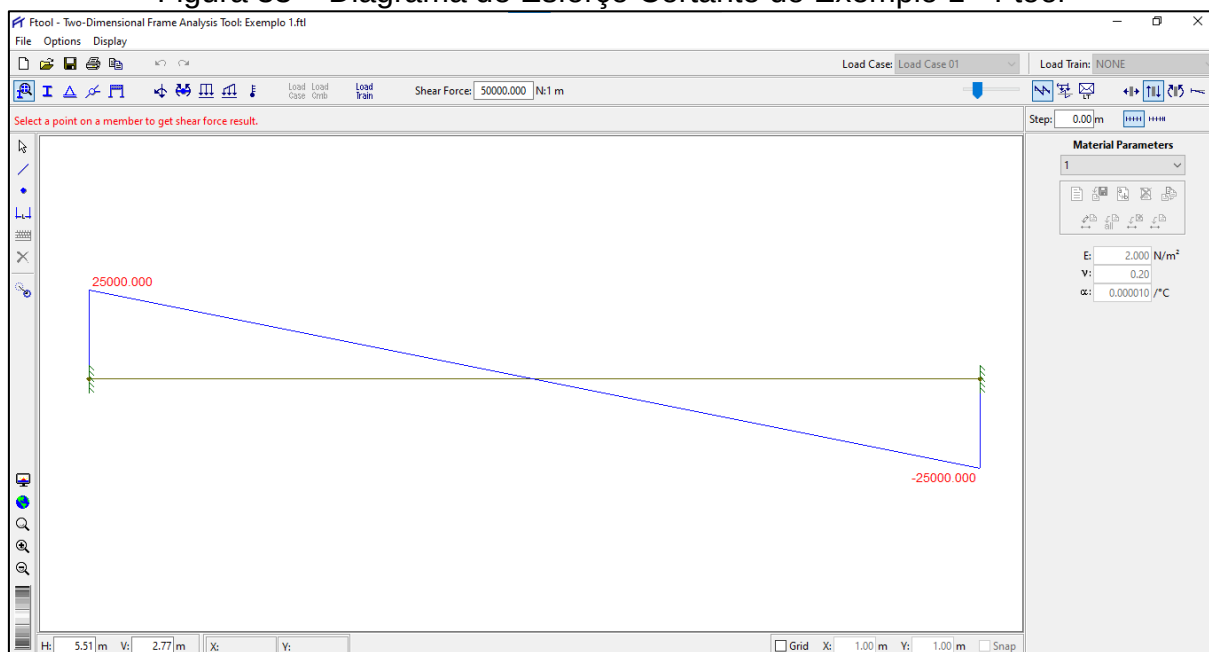
são invertidas. Como instrumento de validação adicional, seguem os diagramas fornecidos pelo *software* Ftool (Figuras 32 a 35).

Figura 32 – Diagrama de Momento Fletor - Exemplo 1 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

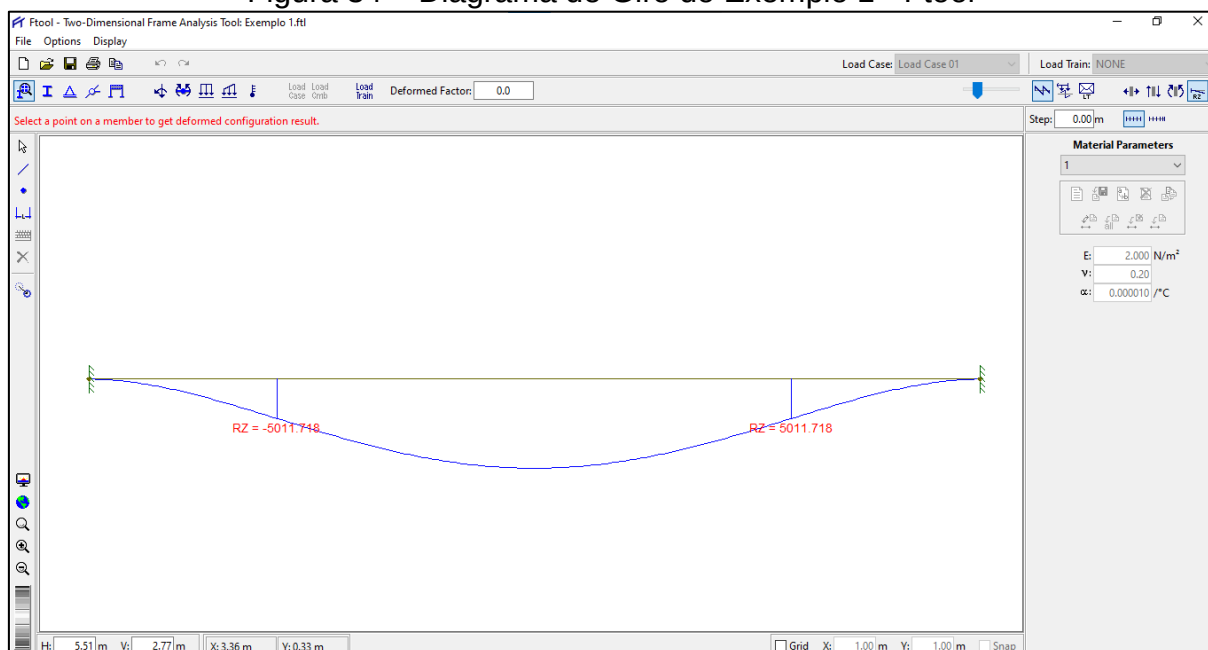
Figura 33 – Diagrama de Esforço Cortante do Exemplo 1 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Vale ressaltar que o diagrama de cortante do FTOOL convencionou positivo abaixo, ao contrário do módulo apresentado neste trabalho.

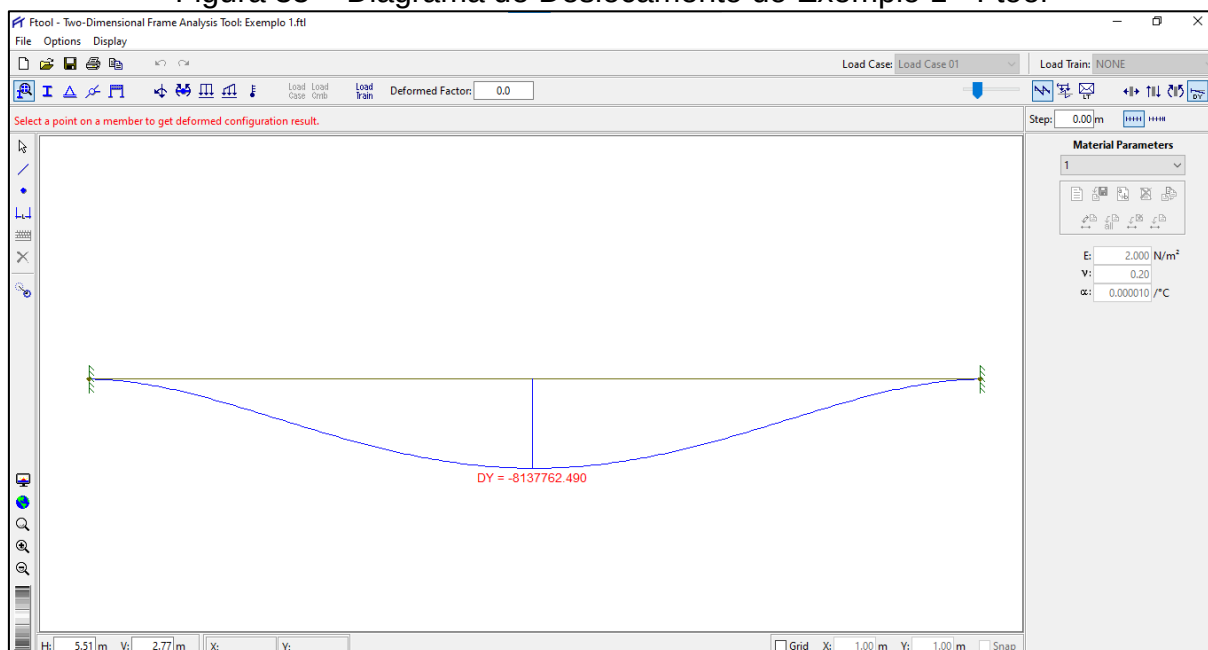
Figura 34 – Diagrama de Giro do Exemplo 1 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Vale ressaltar que o Ftool atribui, por convenção, os valores de giro da estrutura no diagrama de deslocamento.

Figura 35 – Diagrama de Deslocamento do Exemplo 1 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Os relatórios a partir dos exemplos 2 e 3 do item 2.1.1 e exemplos adicionais de estruturas estão no apêndice A.

Nota-se que, considerando diferenças de convenção, os diagramas apresentados pelo Ftool coincidem com os diagramas apresentados pelo módulo desenvolvido neste trabalho, para todos os exemplos apresentados.

Haja vista as comparações mostradas aqui e no apêndice A, percebe-se que o módulo desenvolvido atende às demandas das mais variadas combinações de ações, vínculos e características geométricas das estruturas de maneira correta. Portanto, o módulo pode ser utilizado como uma ferramenta confiável de auxílio aos estudos e ao trabalho na área de Engenharia Civil.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta inicial de criação do módulo de vigas por Euler-Bernoulli foi alcançada, posto que o programa executa perfeitamente e apresenta o relatório em PDF – que explica e detalha o passo a passo da resolução, bem como mostra os diagramas finais. Ressalta-se que os cálculos e diagramas foram validados pelo programa Ftool. Nota-se que o relatório, principal objetivo deste trabalho, contribui significativamente para o estudo, quer seja feito por parte de estudantes, professores ou profissionais recém-formados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APRENDER ENGENHARIA. **VIGA Online**. Disponível em: <<https://www.aprenderengenharia.com.br/viga-online>>. Acesso em: 17 dez. 2021.

AECWeb. **12 softwares de dimensionamento e desenho de estruturas metálicas**. Ftool (2017). Disponível em: <<https://www.aecweb.com.br/revista/materias/12-softwares-de-dimensionamento-e-desenho-de-estruturas-metalicas/17440>>. Acesso em: 30 nov. 2021.

BEER, F.P., JOHNSTON JR., E.R., DEWOLF, J.T., MAZUREK, D.F. **Mecânica dos Materiais**. Tradução: José Benaque Rubert e Walter Libardi. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 2011.

BITTENCOURT, Marco Lúcio. **CAPÍTULO 6: Viga**. Unicamp, 2003. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em421/semII-1999/textos/viga.pdf>>. Acesso em: 23 dez. 2020.

ENGIOBRA. **Cálculo de Vigas Online: Calculadora de Esforços Elásticos**. Disponível em: <<https://engiobra.com/calculadoras/estruturas/>>. Acesso em: 17 dez. 2021.

FLATSCHART, Fábio. Introdução & Evolução. In: FLATSCHART, Fábio. **HTML5: Embarque Imediato**. 2. ed. São Paulo: Brasport, 2011. cap. 1, p. 16-29. Disponível em: <<https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/160673/epub/55>>. Acesso em: 8 abr. 2021.

HO, Don. **Notepad++**. Versão 7.8.5. Paris: Don Ho, 2020. Disponível em: <<https://notepad-plus-plus.org/>>. Acesso em: 25 abr. 2021.

LEMAY, Laura. **Aprenda a Criar Páginas Web com HTML e XHTML em 21 dias**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002. Disponível em: <<https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/259/pdf/89?code=h11jF6RAExq/2nEs8pIYlgwv1lwM/vOaMbApoqRrx0Y4xRICKt83885UEP9Fso11v3xh4NJqjkyEI3K3TDkjg==>>>. Acesso em: 9 mar. 2021.

MARTHA, Luiz Fernando. **Ftool: Two-dimensional Frame Analysis Tool**. Versão básica 4.00.03. Rio de Janeiro: Instituto Tecgraf/PUC-Rio, 2017. Ftool para Windows. Disponível em: <<https://www.Ftool.com.br/Ftool/>>. Acesso em: 18 abr. 2021.

NÚCLEO DE ENGENHARIA VIRTUAL. **IFESTRUT**. Votuporanga, [2016]. Disponível em <<http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Ifestrut/ifestrut.html>>. Acesso em: 10 nov. 2020.

O CALCULISTA DE AÇO. **Softwares gratuitos para calcular estruturas metálicas**. Disponível em: <<https://calculistadeaco.com.br/softwares-gratuitos-para-calcular-estruturas-metalicas/>>. Acesso em: 17 dez. 2021.

PARRA, Isabela Cassia Dominical. **SISTEMAS LINEARES POR ELIMINAÇÃO DEGAUSS**. In: NÚCLEO DE ENGENHARIA VIRTUAL E EXPERIMENTAL., 2015. Disponível em: <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/>. Acesso em: 21 jul. 2021.

PDFMAKE. [S. l.], 2020. Biblioteca JavaScript. Disponível em <<http://pdfmake.org/#/>>. Acesso em: 19 abr. 2021.

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini. **Curso de Resistência dos Materiais - Notas de Aula - Vol. 1.** São Carlos: USP, 2018. Disponível em: <<http://www.livrosabertos.sibi.usp.br/portaldelivrosUSP/catalog/view/194/176/826>>. Acesso em: 17 dez. 2021.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** 2. ed. São Paulo: Markon Brooks, 1996. 408 p.

SANTOS JUNIOR, L. J.; LOPES, A. J. F.; NIRSCHL, G. C. Programa base cad para a análise de estruturas lineares. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DO IFSP, 7., 2016, Matão. **Anais [...]**. Disponível em <<http://mto.ifsp.edu.br/images/CPI/Anais/IC/1720.pdf>>. Acesso em: 23 nov. 2020.

SEGURADO, Válquiria Santos (org.). **Projeto de Interface com o usuário.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016. 195 p. Disponível em: <<https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/124143/pdf/>>. Acesso em: 18 abr. 2021.

SOUSA, Roque Fernando Marcos. **CANVAS HTML5.** [S. l.]: Brasport, 2013. 72 p. Disponível em: <<https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/160686/epub/0>>. Acesso em: 9 mar. 2021.

W3SCHOOLS.COM. **HTML5 tutorial.** Disponível em: <<https://www.w3schools.com/html/default.asp/>>. Acesso em: 9 mar. 2021.

APÊNDICE A - EXEMPLOS DE ESTRUTURAS E RELATÓRIOS GERADOS.

A.1 - EXEMPLO 2 – RESULTADO

Segue, na Figura 36, o relatório gerado para a estrutura do exemplo 2 mostrado no item 2.1.1.2.

Figura 36 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 2

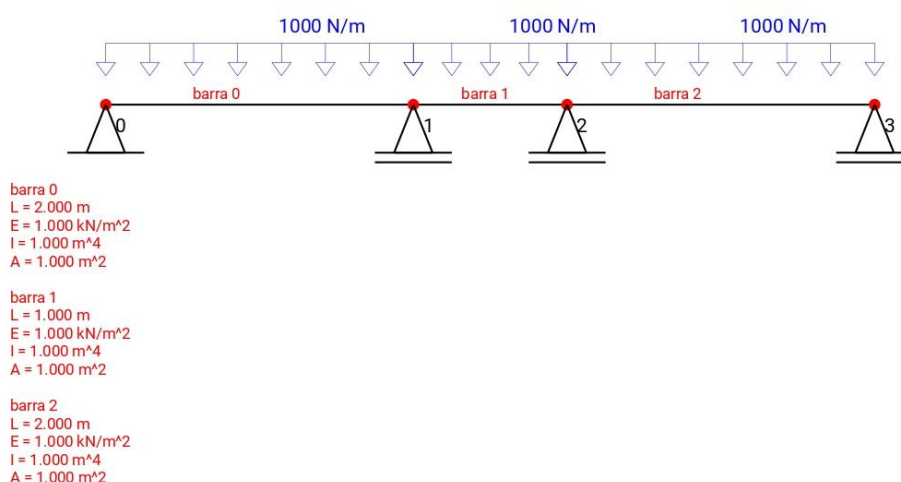
TO TRANSLATE THIS DOCUMENT, DOWNLOAD THE PDF REPORT AND TRANSLATE ON <https://www.onlinedoctranslator.com/pt/> (FREE - GENERATE COMPLETE PDF TRANSLATED FILE) OR TRANSLATE ON <https://translate.google.com/> (SELECT DOCUMENTS - FREE - BUT ONLY TRANSLATE TEXT)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Voluporanga

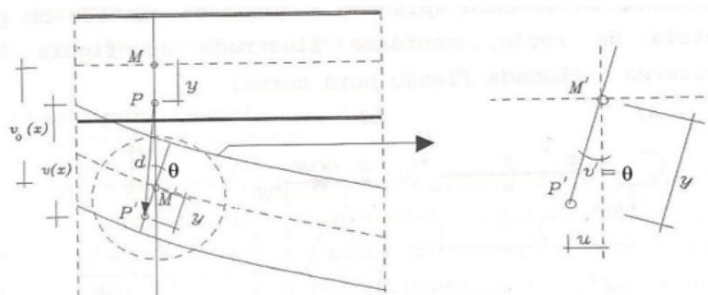
NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
Título: Vigas - Método de Euler-Bernoulli
Autor: Alex Sandro Silva Coelho
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
Tipo: Iniciação Científica com Bolsa Institucional/TCC
Curso: Engenharia Civil
Data da versão original: 30/11/2020
Data da última atualização: 08/12/2021
Data da geração do relatório: 10/12/2021

A estrutura a calcular é a seguinte:



Será desenvolvido aqui o Método da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, conforme Proença (2003). O modelo proposto supõe que o movimento de deformação que ocorre em uma viga submetida à flexão não altera a geometria das seções, que são planas originalmente (seção que passa por M e P na figura 1); ou seja, essas seções continuarão a ser planas e ortogonais ao eixo da viga mesmo após estarem deformadas (seção que passa por M' e P' da figura 1), não importando a distância longitudinal da extremidade.

Figura 1 - Deformação de viga no modelo de Euler-Bernoulli.



Fonte: Adaptado de Proença (2003, p. 98)

Após o desenvolvimento matemático, partir das hipóteses acima, da Lei de Hooke, do equilíbrio de forças e momentos e da limitação do problema a pequenos deslocamentos, Proença (2003), para cada trecho de viga delimitado pela continuidade das funções dos esforços e deslocamentos, chega a:

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> INTEGRAL → </div>				
$\frac{d^2 M}{dx^2} = p$	$\frac{dM}{dx} = Q$	$M = E * I * \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$	$\theta = E * I * \frac{dv(x)}{dx}$	$E * I * v(x)$
p (ação distribuída)	Q (cortante)	M (momento fletor)	θ (giro)	v (deslocamento)
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> ← DERIVADA </div>				

Conforme Proença (2003), quando houver alterações ou descontinuidade das funções $q(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $v(x)$ ou $\theta(x)$, a viga deverá ser dividida em trechos. Posto isso, os casos mais comuns decorrentes são:

- Apoios intermediários;
- Ação (força ou momento) concentrada;
- Variação da rigidez à flexão.

Sendo assim, cada trecho de viga terá o equacionamento, sendo as constantes C1 a C4 determinadas em função das condições de contorno do trecho:

Cortante: $Q(x) = -p * x + C_1$

Momento Fletor: $M(x) = -\left(\frac{p * x^2}{2}\right) + C_1 * x + C_2$

Giro: $E * I * \theta(x) = -\left(\frac{p * x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_1 * x^2}{2}\right) + C_2 * x + C_3$

Deslocamento: $E * I * v(x) = -\left(\frac{p * x^4}{24}\right) + \left(\frac{C_1 * x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_2 * x^2}{2}\right) + C_3 * x + C_4$

Ao final, portanto, haverá um sistema de equações para determinar as constantes C1 a C4 de cada trecho

ATENÇÃO: A PARTIR DAQUI, O PROGRAMA INTERNAMENTE TRABALHA NO SISTEMA kN-m.

Abaixo segue a resolução.

A ordem do sistema é (4 x nº de trechos): 12

Barra 0 - Nós(0 - 1)

Módulo de Elasticidade (E): 1.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 2.000m

Barra 1 - Nós(1 - 2)Módulo de Elasticidade (E): 1.000kN/m²Momento de Inércia (I): 1.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 2 - Nós(2 - 3)Módulo de Elasticidade (E): 1.000kN/m²Momento de Inércia (I): 1.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 2.000m

Condições de Contorno

As condições de contorno que serão aplicadas para a resolução dos cálculos posteriores são adotadas conforme o tipo de apoio que o nó apresenta: móvel, fixo, engaste, rótula ou livre. Ademais, elas mudam se os apoios forem nas extremidades ou internos (para o caso de mais de uma barra na estrutura). Posto isso, abaixo têm-se o detalhamento das características de cada condição de contorno conforme o tipo de apoio.

Para os apoios que se encontram nas extremidades da estrutura, as equações de condições de contorno são mais simples. Logo, usa-se:

Obs: será utilizada a letra P para força e M para momento concentrado.

Apoio Móvel:

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Apoio Fixo:

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Engaste:

$$\theta(x) = 0 \rightarrow -q \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x/E \cdot I + C3/E \cdot I = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Livre:

$$Q(x) = P \rightarrow -P - q \cdot x + C1 = 0$$

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

Rótula: Não é possível haver rótulas nas extremidades de uma estrutura

Para os apoios que se encontram internamente na estrutura, as equações de compatibilização dos trechos abordam mais características. Desse modo, tem-se que:

Obs: será utilizada a letra "e" para lado esquerdo do ponto e "d" para lado direito.

Apoio Móvel:

$$\begin{aligned} Me(xe) - Md(xd) = M &\rightarrow (-qe*xe^2/2 + C1e*xe + C2e) - (-qd*xd^2/2 + C1d*xd + C2d) = M \\ \theta e(xe) = \theta d(xd) &\rightarrow -qe*xe^3/6*Ee*Ie + C1e*xe^2/2*Ee*Ie + C2e*xe/Ee*Ie + C3e/Ee*Ie = -qd*xd^3/6*Ed*Id + \\ &C1d*xd^2/2*Ed*Id + C2d*xd/Ed*Id + C3d/Ed*Id \\ ve(xe) = 0 &\rightarrow -qe*(xe^4)/24*Ee*Ie + C1e*xe^3/6*Ee*Ie + C2e*xe^2/2*Ee*Ie + C3e*xe/Ee*Ie + C4e/Ee*Ie = 0 \\ vd(xd) = 0 &\rightarrow -qd*(xd^4)/24*Ed*Id + C1d*xd^3/6*Ed*Id + C2d*xd^2/2*Ed*Id + C3d*xd/Ed*Id + C4d/Ed*Id = 0 \end{aligned}$$

Apoio Fixo:

$$\begin{aligned} Me(xe) - Md(xd) = M &\rightarrow (-qe*xe^2/2 + C1e*xe + C2e) - (-qd*xd^2/2 + C1d*xd + C2d) = M \\ \theta e(xe) = \theta d(xd) &\rightarrow -qe*xe^3/6*Ee*Ie + C1e*xe^2/2*Ee*Ie + C2e*xe/Ee*Ie + C3e/Ee*Ie = -qd*xd^3/6*Ed*Id + \\ &C1d*xd^2/2*Ed*Id + C2d*xd/Ed*Id + C3d/Ed*Id \\ ve(xe) = 0 &\rightarrow -qe*(xe^4)/24*Ee*Ie + C1e*xe^3/6*Ee*Ie + C2e*xe^2/2*Ee*Ie + C3e*xe/Ee*Ie + C4e/Ee*Ie = 0 \\ vd(xd) = 0 &\rightarrow -qd*(xd^4)/24*Ed*Id + C1d*xd^3/6*Ed*Id + C2d*xd^2/2*Ed*Id + C3d*xd/Ed*Id + C4d/Ed*Id = 0 \end{aligned}$$

Engaste:

$$\begin{aligned} \theta e(xe) = 0 &\rightarrow -qe*xe^3/6*Ee*Ie + C1e*xe^2/2*Ee*Ie + C2e*xe/Ee*Ie + C3e/Ee*Ie = 0 \\ \theta d(xd) = 0 &\rightarrow -qd*xd^3/6*Ed*Id + C1d*xd^2/2*Ed*Id + C2d*xd/Ed*Id + C3d/Ed*Id = 0 \\ ve(xe) = 0 &\rightarrow -qe*(xe^4)/24*Ee*Ie + C1e*xe^3/6*Ee*Ie + C2e*xe^2/2*Ee*Ie + C3e*xe/Ee*Ie + C4e/Ee*Ie = 0 \\ vd(xd) = 0 &\rightarrow -qd*(xd^4)/24*Ed*Id + C1d*xd^3/6*Ed*Id + C2d*xd^2/2*Ed*Id + C3d*xd/Ed*Id + C4d/Ed*Id = 0 \end{aligned}$$

Rótula:

$$\begin{aligned} Qe(xe) - Qd(xd) = P &\rightarrow (-qe*xe + C1e) - (-qd*xd + C1d) = P \\ Me(xe) = M &\rightarrow -M - qe*xe^2/2 + C1e*xe + C2e = 0 \\ Md(xd) = M &\rightarrow -M - qd*xd^2/2 + C1d*xd + C2d = 0 \\ ve(xe) = vd(xd) &\rightarrow -qe*(xe^4)/24*Ee*Ie + C1e*xe^3/6*Ee*Ie + C2e*xe^2/2*Ee*Ie + C3e*xe/Ee*Ie + C4e/Ee*Ie = \\ &-qd*(xd^4)/24*Ed*Id + C1d*xd^3/6*Ed*Id + C2d*xd^2/2*Ed*Id + C3d*xd/Ed*Id + C4d/Ed*Id \end{aligned}$$

Livre:

$$\begin{aligned} Qe(xe) - Qd(xd) = P &\rightarrow (-qe*xe + C1e) - (-qd*xd + C1d) = P \\ Me(xe) - Md(xd) = M &\rightarrow (-qe*xe^2/2 + C1e*xe + C2e) - (-qd*xd^2/2 + C1d*xd + C2d) = M \\ \theta e(xe) = \theta d(xd) &\rightarrow -qe*xe^3/6*Ee*Ie + C1e*xe^2/2*Ee*Ie + C2e*xe/Ee*Ie + C3e/Ee*Ie = -qd*xd^3/6*Ed*Id + \\ &C1d*xd^2/2*Ed*Id + C2d*xd/Ed*Id + C3d/Ed*Id \\ ve(xe) = vd(xd) &\rightarrow -qe*(xe^4)/24*Ee*Ie + C1e*xe^3/6*Ee*Ie + C2e*xe^2/2*Ee*Ie + C3e*xe/Ee*Ie + C4e/Ee*Ie = \\ &-qd*(xd^4)/24*Ed*Id + C1d*xd^3/6*Ed*Id + C2d*xd^2/2*Ed*Id + C3d*xd/Ed*Id + C4d/Ed*Id \end{aligned}$$

Haja vista os apoios da estrutura aqui relatada, as equações a serem utilizadas nos cálculos são:

Nó 0 - Condições de contorno para Apoio Fixo no primeiro nó:

Para $x = 0$

$$\text{Eq. 1: } M(x) = 0: -0.000 - 1.000*0^2/2 + C1*0 + C2 = 0$$

$$\text{Eq. 2: } v(x) = 0: -1.000*(0^4)/(24*1.000*1.000) + C1*0^3/(6*1.000*1.000) + C2*0^2/(2*1.000*1.000) + C3*0/(1.000*1.000) + C4/(1.000*1.000) = 0$$

Nó 1 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Móvel interno:

Para $x = 1.000$

$$\text{Eq. 3: } Me(x) - Md(x) = M \rightarrow (-1.000*1.000^2/2 + C1e*1.000 + C2e) - (-1.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = -$$

(0.000)

Eq. 4: $\theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -1.000 \cdot 1.000^3 / (6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1e \cdot 1.000^2 / (2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2e \cdot 1.000 / (1.000 \cdot 1.000) + C3e / (1.000 \cdot 1.000) = -1.000 \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2d \cdot 0.000 / (1.000 \cdot 1.000) + C3d / (1.000 \cdot 1.000)$

Eq. 5: $v_e(x) = 0: -1.000 \cdot (1.000^4) / (24 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1e \cdot 1.000^3 / (6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2e \cdot 1.000^2 / (2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C3e \cdot 1.000 / (1.000 \cdot 1.000) + C4e / (1.000 \cdot 1.000) = 0$

Eq. 6: $v_d(x) = 0: -1.000 \cdot (0.000^4) / (24 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1d \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C3d \cdot 0.000 / (1.000 \cdot 1.000) + C4d / (1.000 \cdot 1.000) = 0$

Nó 2 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Móvel interno:

Para $x = 1.000$

Eq. 7: $M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-1.000 \cdot 1.000^2 / 2 + C1e \cdot 1.000 + C2e) - (-1.000 \cdot 0.000^2 / 2 + C1d \cdot 0.000 + C2d) = - (0.000)$

Eq. 8: $\theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -1.000 \cdot 1.000^3 / (6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1e \cdot 1.000^2 / (2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2e \cdot 1.000 / (1.000 \cdot 1.000) + C3e / (1.000 \cdot 1.000) = -1.000 \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2d \cdot 0.000 / (1.000 \cdot 1.000) + C3d / (1.000 \cdot 1.000)$

Eq. 9: $v_e(x) = 0: -1.000 \cdot (1.000^4) / (24 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1e \cdot 1.000^3 / (6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2e \cdot 1.000^2 / (2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C3e \cdot 1.000 / (1.000 \cdot 1.000) + C4e / (1.000 \cdot 1.000) = 0$

Eq. 10: $v_d(x) = 0: -1.000 \cdot (0.000^4) / (24 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1d \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C3d \cdot 0.000 / (1.000 \cdot 1.000) + C4d / (1.000 \cdot 1.000) = 0$

Nó 3 - Condições de contorno para Apoio Móvel no último nó:

Para $x = 2.000$

Eq. 11: $M(x) = M: -0.000 - 1.000 \cdot 2.000^2 / 2 + C1 \cdot 2.000 + C2 = 0$

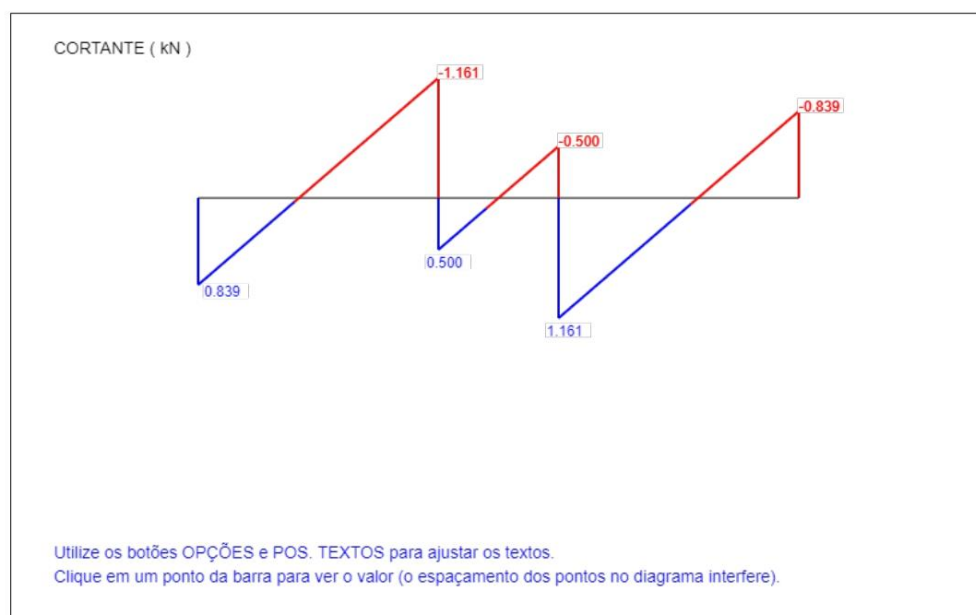
Eq. 12: $v(x) = 0: -1.000 \cdot (2.000^4) / (24 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1 \cdot 2.000^3 / (6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2 \cdot 2.000^2 / (2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C3 \cdot 2.000 / (1.000 \cdot 1.000) + C4 / (1.000 \cdot 1.000) = 0$

Montando as equações num sistema global matricial do tipo $A \cdot C = B$, temos:

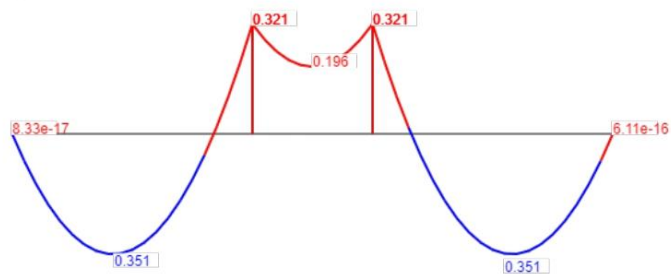
Eq.	C1,0	C2,0	C3,0	C4,0	C1,1	C2,1	C3,1	C4,1	C1,2	C2,2	C3,2	C4,2	B
1	0.0000	1.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	1.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	2.000	1.000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.000
4	2.000	2.000	1.000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.333
5	1.333	2.000	2.000	1.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.667
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.000	1.000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.000	0.0000	0.0000	0.500
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.500	1.000	1.000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.000	0.0000	0.167
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.167	0.500	1.000	1.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0417
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.000	1.000	0.0000	0.0000	2.000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.333	2.000	2.000	1.000	0.667

Resolvendo o sistema linear de equações pelo Método de Gauss (vide <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>), encontram-se os valores das constantes C1 a C4 de cada trecho e, portando, as equações dos esforços de cada trecho (diagramas).

Abaixo seguem os diagramas (no sistema kN-m):



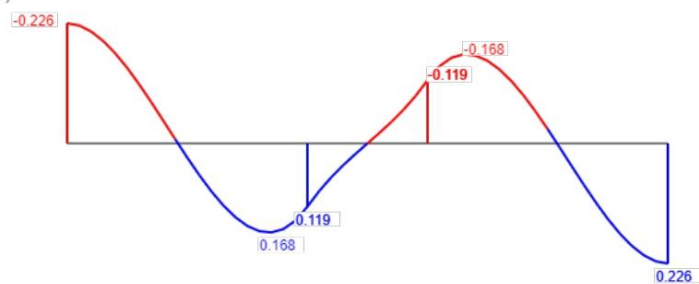
MOMENTO (kN*m)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

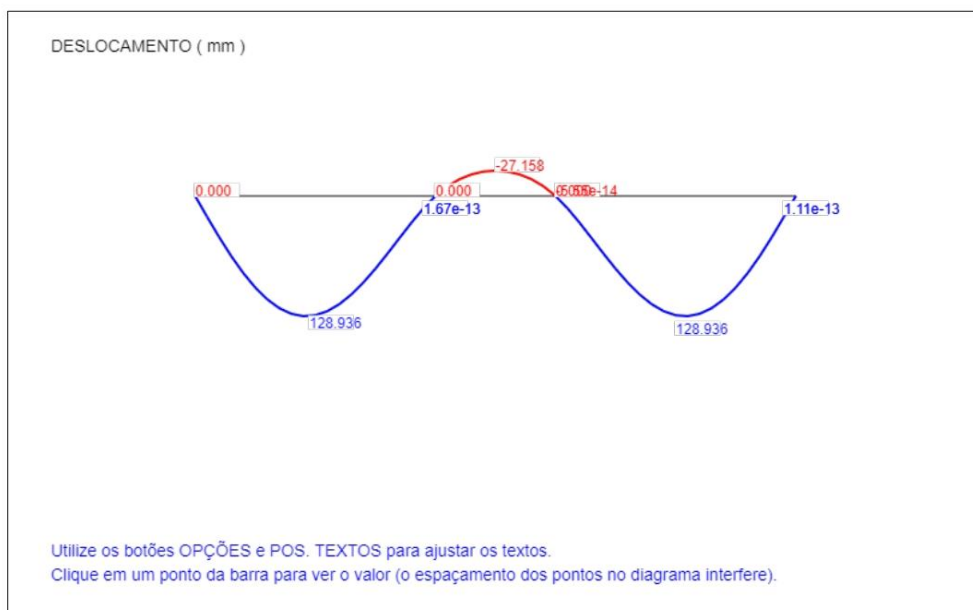
Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).

GIRO: (rad)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R.Jr. Resistência dos materiais. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2011.

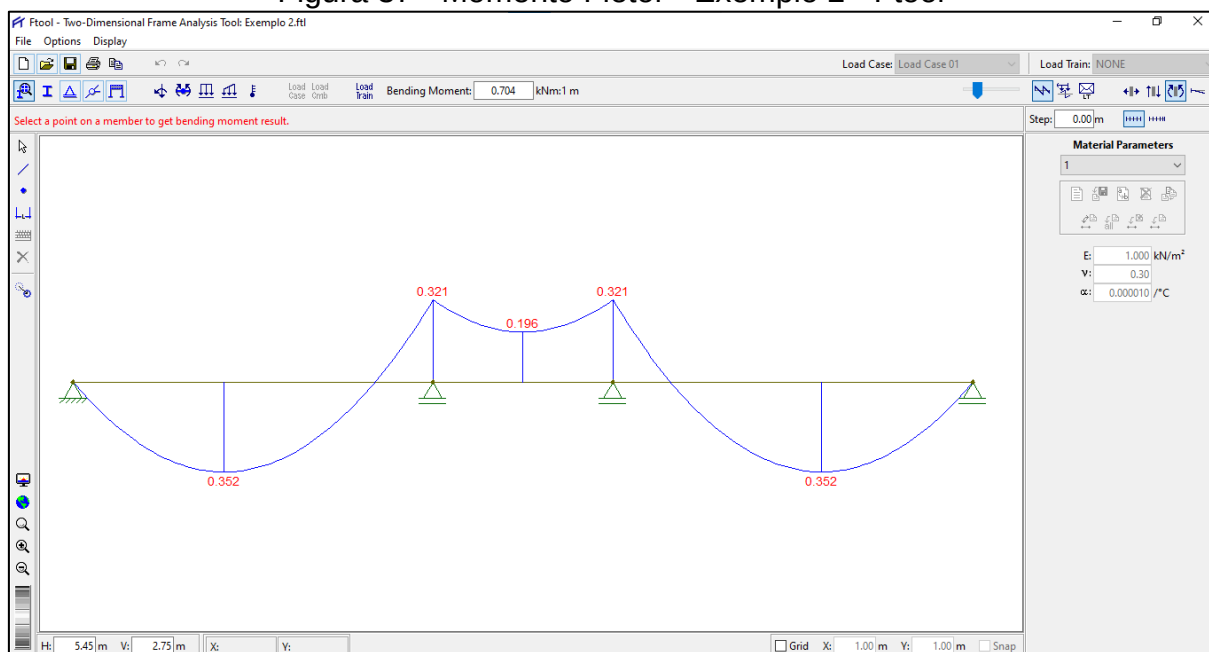
BITTENCOURT, Marco Lúcio. CAPÍTULO 6: Viga. Unicamp, 2003. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em421/semII-1999/textos/viga.pdf>>. Acesso em: 23 jul. 2020.

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini Proença. Curso de resistência dos materiais. Notas de aula – vol. 1. São Carlos: USP, 2003.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do programa já disponível *on-line*.

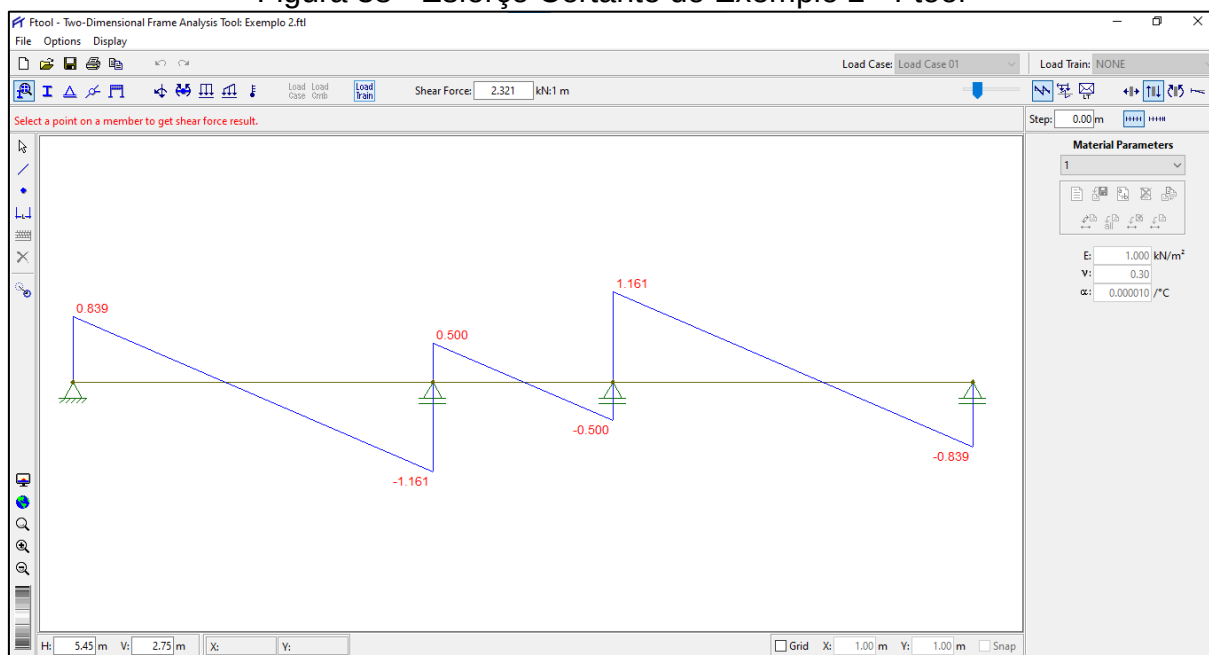
Note que os diagramas gerados são exatamente os apresentados no exemplo 2 do item 2.1.1.2, observando-se que as convenções dos diagramas de cortante e giro são invertidas. Como instrumento de validação adicional, seguem os diagramas fornecidos pelo *software* Ftool (Figuras 37 a 39).

Figura 37 - Momento Fletor - Exemplo 2 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

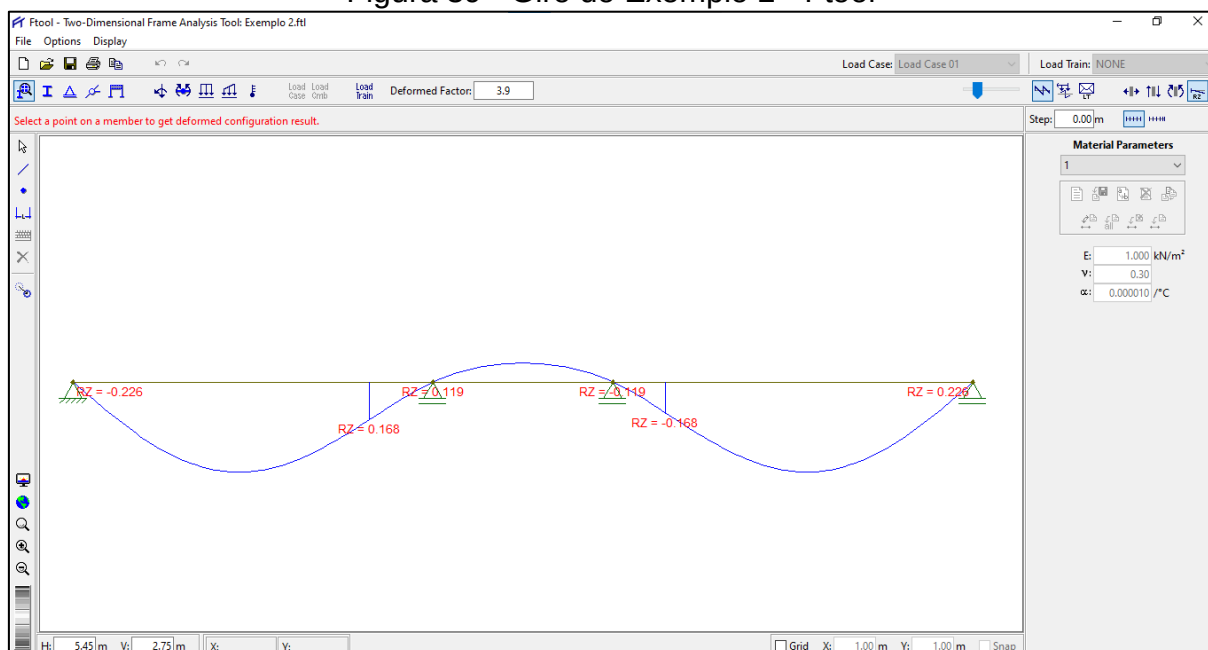
Figura 38 - Esforço Cortante do Exemplo 2 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Vale ressaltar que o diagrama de cortante do FTOOL convencionou positivo abaixo, ao contrário do módulo apresentado neste trabalho.

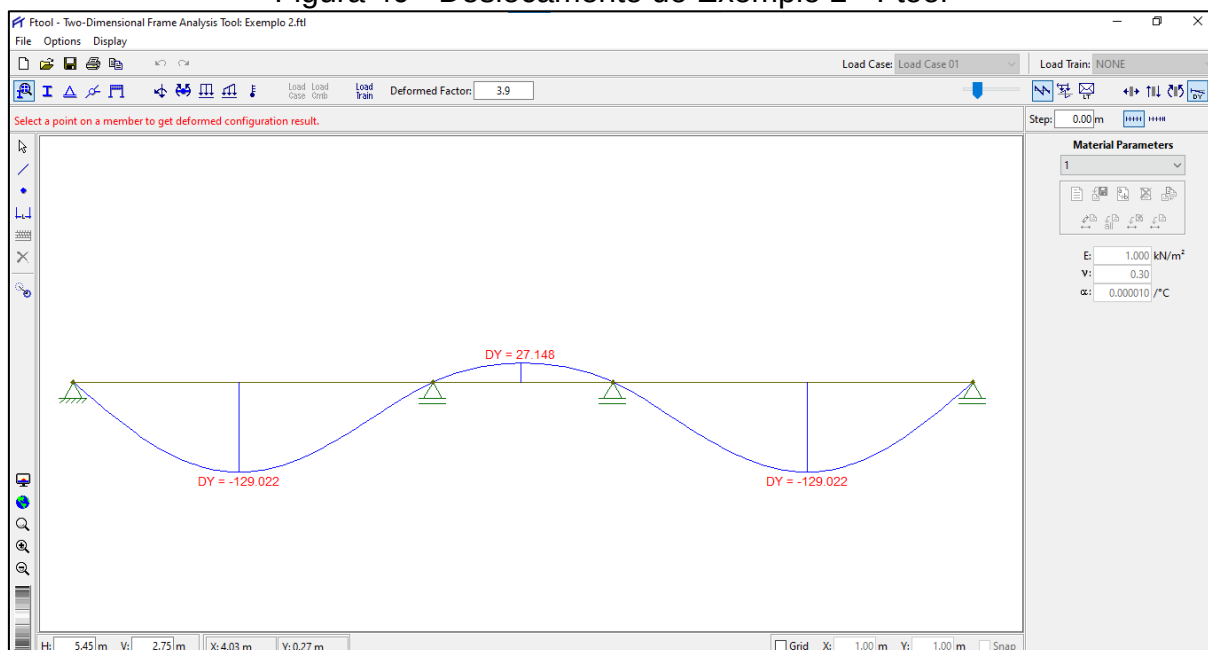
Figura 39 - Giro do Exemplo 2 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Vale ressaltar que o Ftool atribui, por convenção, os valores de giro da estrutura no diagrama de deslocamento.

Figura 40 - Deslocamento do Exemplo 2 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

A.2 - EXEMPLO 3 – RESULTADO

Segue, na Figura 41, o relatório gerado para a estrutura do exemplo 3 mostrado no item 2.1.1.3.

Figura 41 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 3

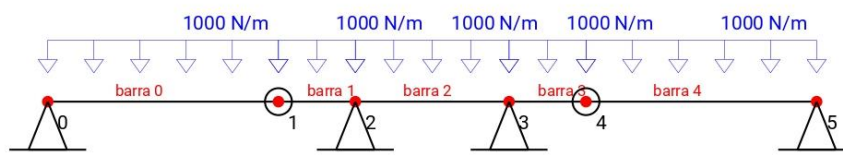
TO TRANSLATE THIS DOCUMENT, DOWNLOAD THE PDF REPORT AND TRANSLATE ON <https://www.onlinedoctranslator.com/pt/> (FREE - GENERATE COMPLETE PDF TRANSLATED FILE) OR TRANSLATE ON <https://translate.google.com/> (SELECT DOCUMENTS - FREE - BUT ONLY TRANSLATE TEXT)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Voluparanga

NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
Título: Vigas - Método de Euler-Bernoulli
Autor: Alex Sandro Silva Coelho
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
Tipo: Iniciação Científica com Bolsa Institucional/TCC
Curso: Engenharia Civil
Data da versão original: 30/11/2020
Data da última atualização: 08/12/2021
Data da geração do relatório: 10/12/2021

A estrutura a calcular é a seguinte:



barra 0
L = 1.500 m
E = 1.000 kN/m²
I = 1.000 m⁴
A = 1.000 m²

barra 1
L = 0.500 m
E = 1.000 kN/m²
I = 1.000 m⁴
A = 1.000 m²

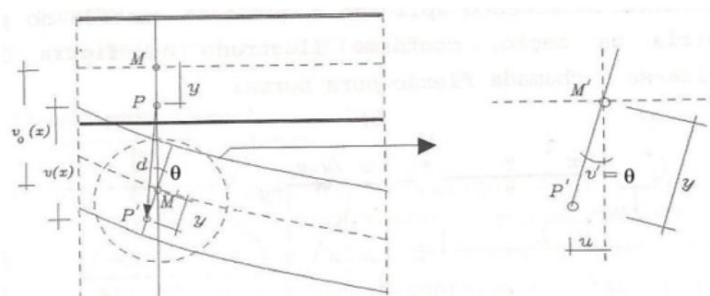
barra 2
L = 1.000 m
E = 1.000 kN/m²
I = 1.000 m⁴
A = 1.000 m²

barra 3
L = 0.500 m
E = 1.000 kN/m²
I = 1.000 m⁴
A = 1.000 m²

barra 4
L = 1.500 m
E = 1.000 kN/m²
I = 1.000 m⁴
A = 1.000 m²

Será desenvolvido aqui o Método da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, conforme Proença (2003). O modelo proposto supõe que o movimento de deformação que ocorre em uma viga submetida à flexão não altera a geometria das seções, que são planas originalmente (seção que passa por M e P na figura 1); ou seja, essas seções continuarão a ser planas e ortogonais ao eixo da viga mesmo após estarem deformadas (seção que passa por M' e P' da figura 1), não importando a distância longitudinal da extremidade.

Figura 1 - Deformação de viga no modelo de Euler-Bernoulli.



Fonte: Adaptado de Proença (2003, p. 98)

Após o desenvolvimento matemático, partir das hipóteses acima, da Lei de Hooke, do equilíbrio de forças e momentos e da limitação do problema a pequenos deslocamentos, Proença (2003), para cada trecho de viga delimitado pela continuidade das funções dos esforços e deslocamentos, chega a:

INTEGRAL →				
$\frac{d^2 M}{dx^2} = p$	$\frac{dM}{dx} = Q$	$M = E \cdot I \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$	$\theta = E \cdot I \cdot \frac{dv(x)}{dx}$	$E \cdot I \cdot v(x)$
p (ação distribuída)	Q (cortante)	M (momento fletor)	θ (giro)	v (deslocamento)
← DERIVADA				

Conforme Proença (2003), quando houver alterações ou descontinuidade das funções $q(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $v(x)$ ou $\theta(x)$, a viga deverá ser dividida em trechos. Posto isso, os casos mais comuns decorrentes são:

- Apoios intermediários;
- Ação (força ou momento) concentrada;
- Variação da rigidez à flexão.

Sendo assim, cada trecho de viga terá o equacionamento, sendo as constantes C1 a C4 determinadas em função das condições de contorno do trecho:

$$\text{Cortante: } Q(x) = -p \cdot x + C_1$$

$$\text{Momento Fletor: } M(x) = -\left(\frac{p \cdot x^2}{2}\right) + C_1 \cdot x + C_2$$

$$\text{Giro: } E \cdot I \cdot \theta(x) = -\left(\frac{p \cdot x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_1 \cdot x^2}{2}\right) + C_2 \cdot x + C_3$$

$$\text{Deslocamento: } E \cdot I \cdot v(x) = -\left(\frac{p \cdot x^4}{24}\right) + \left(\frac{C_1 \cdot x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_2 \cdot x^2}{2}\right) + C_3 \cdot x + C_4$$

Ao final, portanto, haverá um sistema de equações para determinar as constantes C1 a C4 de cada trecho

ATENÇÃO: A PARTIR DAQUI, O PROGRAMA INTERNAMENTE TRABALHA NO SISTEMA kN-m.

Abaixo segue a resolução.

A ordem do sistema é (4 x nº de trechos): 20

Barra 0 - Nós(0 - 1)

Módulo de Elasticidade (E): 1.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 1.500m

Barra 1 - Nós(1 - 2)

Módulo de Elasticidade (E): 1.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 0.500m

Barra 2 - Nós(2 - 3)

Módulo de Elasticidade (E): 1.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 3 - Nós(3 - 4)

Módulo de Elasticidade (E): 1.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 0.500m

Barra 4 - Nós(4 - 5)

Módulo de Elasticidade (E): 1.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 1.500m

Condições de Contorno

As condições de contorno que serão aplicadas para a resolução dos cálculos posteriores são adotadas conforme o tipo de apoio que o nó apresenta: móvel, fixo, engaste, rótula ou livre. Ademais, elas mudam se os apoios forem nas extremidades ou internos (para o caso de mais de uma barra na estrutura). Posto isso, abaixo têm-se o detalhamento das características de cada condição de contorno conforme o tipo de apoio.

Para os apoios que se encontram nas extremidades da estrutura, as equações de condições de contorno são mais simples. Logo, usa-se:

Obs: será utilizada a letra P para força e M para momento concentrado.

Apoio Móvel:

$$\begin{aligned} M(x) = M &\rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0 \\ v(x) = 0 &\rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0 \end{aligned}$$

Apoio Fixo:

$$\begin{aligned} M(x) = M &\rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0 \\ v(x) = 0 &\rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0 \end{aligned}$$

Engaste:

$$\begin{aligned} \theta(x) = 0 &\rightarrow -q \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x/E \cdot I + C3/E \cdot I = 0 \\ v(x) = 0 &\rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0 \end{aligned}$$

Livre:

$$\begin{aligned} Q(x) = P &\rightarrow -P - q \cdot x + C1 = 0 \\ M(x) = M &\rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0 \end{aligned}$$

Rótula: Não é possível haver rótulas nas extremidades de uma estrutura

Para os apoios que se encontram internamente na estrutura, as equações de compatibilização dos trechos abordam mais características. Desse modo, tem-se que:

Obs: será utilizada a letra "e" para lado esquerdo do ponto e "d" para lado direito.

Apoio Móvel:

$$\begin{aligned} Me(xe) - Md(xd) &= M \rightarrow (-qe \cdot xe^2/2 + C1e \cdot xe + C2e) - (-qd \cdot xd^2/2 + C1d \cdot xd + C2d) = M \\ \theta e(xe) = \theta d(xd) &\rightarrow -qe \cdot xe^3/6 \cdot Ee \cdot Ie + C1e \cdot xe^2/2 \cdot Ee \cdot Ie + C2e \cdot xe/Ee \cdot Ie + C3e/Ee \cdot Ie = -qd \cdot xd^3/6 \cdot Ed \cdot Id + C1d \cdot xd^2/2 \cdot Ed \cdot Id + C2d \cdot xd/Ed \cdot Id + C3d/Ed \cdot Id \\ ve(xe) = 0 &\rightarrow -qe \cdot (xe^4)/24 \cdot Ee \cdot Ie + C1e \cdot xe^3/6 \cdot Ee \cdot Ie + C2e \cdot xe^2/2 \cdot Ee \cdot Ie + C3e \cdot xe/Ee \cdot Ie + C4e/Ee \cdot Ie = 0 \\ vd(xd) = 0 &\rightarrow -qd \cdot (xd^4)/24 \cdot Ed \cdot Id + C1d \cdot xd^3/6 \cdot Ed \cdot Id + C2d \cdot xd^2/2 \cdot Ed \cdot Id + C3d \cdot xd/Ed \cdot Id + C4d/Ed \cdot Id = 0 \end{aligned}$$

Apoio Fixo:

$$\begin{aligned} Me(xe) - Md(xd) &= M \rightarrow (-qe \cdot xe^2/2 + C1e \cdot xe + C2e) - (-qd \cdot xd^2/2 + C1d \cdot xd + C2d) = M \\ \theta e(xe) = \theta d(xd) &\rightarrow -qe \cdot xe^3/6 \cdot Ee \cdot Ie + C1e \cdot xe^2/2 \cdot Ee \cdot Ie + C2e \cdot xe/Ee \cdot Ie + C3e/Ee \cdot Ie = -qd \cdot xd^3/6 \cdot Ed \cdot Id + C1d \cdot xd^2/2 \cdot Ed \cdot Id + C2d \cdot xd/Ed \cdot Id + C3d/Ed \cdot Id \\ ve(xe) = 0 &\rightarrow -qe \cdot (xe^4)/24 \cdot Ee \cdot Ie + C1e \cdot xe^3/6 \cdot Ee \cdot Ie + C2e \cdot xe^2/2 \cdot Ee \cdot Ie + C3e \cdot xe/Ee \cdot Ie + C4e/Ee \cdot Ie = 0 \\ vd(xd) = 0 &\rightarrow -qd \cdot (xd^4)/24 \cdot Ed \cdot Id + C1d \cdot xd^3/6 \cdot Ed \cdot Id + C2d \cdot xd^2/2 \cdot Ed \cdot Id + C3d \cdot xd/Ed \cdot Id + C4d/Ed \cdot Id = 0 \end{aligned}$$

Engaste:

$$\theta e(xe) = 0 \rightarrow -qe \cdot xe^3/6 \cdot Ee \cdot Ie + C1e \cdot xe^2/2 \cdot Ee \cdot Ie + C2e \cdot xe/Ee \cdot Ie + C3e/Ee \cdot Ie = 0$$

$$\begin{aligned}\theta d(xd) = 0 &\rightarrow -qd \cdot xd^3/6 \cdot Ed \cdot Id + C1d \cdot xd^2/2 \cdot Ed \cdot Id + C2d \cdot xd/Ed \cdot Id + C3d/Ed \cdot Id = 0 \\ ve(xe) = 0 &\rightarrow -qe \cdot (xe^4)/24 \cdot Ee \cdot Ie + C1e \cdot xe^3/6 \cdot Ee \cdot Ie + C2e \cdot xe^2/2 \cdot Ee \cdot Ie + C3e \cdot xe/Ee \cdot Ie + C4e/Ee \cdot Ie = 0 \\ vd(xd) = 0 &\rightarrow -qd \cdot (xd^4)/24 \cdot Ed \cdot Id + C1d \cdot xd^3/6 \cdot Ed \cdot Id + C2d \cdot xd^2/2 \cdot Ed \cdot Id + C3d \cdot xd/Ed \cdot Id + C4d/Ed \cdot Id = 0\end{aligned}$$

Rótula:

$$\begin{aligned}Qe(xe) - Qd(xd) = P &\rightarrow (-qe \cdot xe + C1e) - (-qd \cdot xd + C1d) = P \\ Me(xe) = M &\rightarrow -M - qe \cdot xe^2/2 + C1e \cdot xe + C2e = 0 \\ Md(xd) = M &\rightarrow -M - qd \cdot xd^2/2 + C1d \cdot xd + C2d = 0 \\ ve(xe) = vd(xd) &\rightarrow -qe \cdot (xe^4)/24 \cdot Ee \cdot Ie + C1e \cdot xe^3/6 \cdot Ee \cdot Ie + C2e \cdot xe^2/2 \cdot Ee \cdot Ie + C3e \cdot xe/Ee \cdot Ie + C4e/Ee \cdot Ie = \\ &-qd \cdot (xd^4)/24 \cdot Ed \cdot Id + C1d \cdot xd^3/6 \cdot Ed \cdot Id + C2d \cdot xd^2/2 \cdot Ed \cdot Id + C3d \cdot xd/Ed \cdot Id + C4d/Ed \cdot Id\end{aligned}$$

Livre:

$$\begin{aligned}Qe(xe) - Qd(xd) = P &\rightarrow (-qe \cdot xe + C1e) - (-qd \cdot xd + C1d) = P \\ Me(xe) - Md(xd) = M &\rightarrow (-qe \cdot xe^2/2 + C1e \cdot xe + C2e) - (-qd \cdot xd^2/2 + C1d \cdot xd + C2d) = M \\ \theta e(xe) = \theta d(xd) &\rightarrow -qe \cdot xe^3/6 \cdot Ee \cdot Ie + C1e \cdot xe^2/2 \cdot Ee \cdot Ie + C2e \cdot xe/Ee \cdot Ie + C3e/Ee \cdot Ie = -qd \cdot xd^3/6 \cdot Ed \cdot Id + \\ &C1d \cdot xd^2/2 \cdot Ed \cdot Id + C2d \cdot xd/Ed \cdot Id + C3d/Ed \cdot Id \\ ve(xe) = vd(xd) &\rightarrow -qe \cdot (xe^4)/24 \cdot Ee \cdot Ie + C1e \cdot xe^3/6 \cdot Ee \cdot Ie + C2e \cdot xe^2/2 \cdot Ee \cdot Ie + C3e \cdot xe/Ee \cdot Ie + C4e/Ee \cdot Ie = \\ &-qd \cdot (xd^4)/24 \cdot Ed \cdot Id + C1d \cdot xd^3/6 \cdot Ed \cdot Id + C2d \cdot xd^2/2 \cdot Ed \cdot Id + C3d \cdot xd/Ed \cdot Id + C4d/Ed \cdot Id\end{aligned}$$

Haja vista os apoios da estrutura aqui relatada, as equações a serem utilizadas nos cálculos são:

Nó 0 - Condições de contorno para Apoio Fixo no primeiro nó:

Para $x = 0$

$$\text{Eq. 1: } M(x) = 0: -0.000 - 1.000 \cdot 0^2/2 + C1 \cdot 0 + C2 = 0$$

$$\text{Eq. 2: } v(x) = 0: -1.000 \cdot (0^4)/(24 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1 \cdot 0^3/(6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2 \cdot 0^2/(2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C3 \cdot 0/(1.000 \cdot 1.000) + C4/(1.000 \cdot 1.000) = 0$$

Nó 1 - Equações de compatibilização de trechos para Rótula:

Para $x = 0.500$

$$\text{Eq. 3: } Qe(x) - Qd(x) = P \rightarrow (-1.000 \cdot 0.500 + C1e) - (-1.000 \cdot 0.000 + C1d) = 0.000$$

$$\text{Eq. 4: } Me(x) = 0: -(0.000) - 1.000 \cdot 0.500^2/2 + C1e \cdot 0.500 + C2e = 0$$

$$\text{Eq. 5: } Md(x) = 0: -(0.000) - 1.000 \cdot 0.000^2/2 + C1d \cdot 0.000 + C2d = 0$$

$$\text{Eq. 6: } ve(x) = vd(x) \rightarrow -1.000 \cdot (0.500^4)/(24 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1e \cdot 0.500^3/(6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2e \cdot 0.500^2/(2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C3e \cdot 0.500/(1.000 \cdot 1.000) + C4e/(1.000 \cdot 1.000) = -1.000 \cdot (0.000^4)/(24 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1d \cdot 0.000^3/(6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2d \cdot 0.000^2/(2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C3d \cdot 0.000/(1.000 \cdot 1.000) + C4d/(1.000 \cdot 1.000)$$

Nó 2 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Móvel interno:

Para $x = 0.500$

$$\text{Eq. 7: } Me(x) - Md(x) = M \rightarrow (-1.000 \cdot 0.500^2/2 + C1e \cdot 0.500 + C2e) - (-1.000 \cdot 0.000^2/2 + C1d \cdot 0.000 + C2d) = - (0.000)$$

$$\text{Eq. 8: } \theta e(x) = \theta d(x) \rightarrow -1.000 \cdot 0.500^3/(6 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C1e \cdot 0.500^2/(2 \cdot 1.000 \cdot 1.000) + C2e \cdot 0.500/$$

$$(1.000*1.000) + C3e/(1.000*1.000) = -1.000*0.000^3/(6*1.000*1.000) + C1d*0.000^2/(2*1.000*1.000) + C2d*0.000/(1.000*1.000) + C3d/(1.000*1.000)$$

$$\text{Eq. 9: } v_e(x) = 0: -1.000*(0.500^4)/(24*1.000*1.000) + C1e*0.500^3/(6*1.000*1.000) + C2e*0.500^2/(2*1.000*1.000) + C3e*0.500/(1.000*1.000) + C4e/(1.000*1.000) = 0$$

$$\text{Eq. 10: } v_d(x) = 0: -1.000*(0.000^4)/(24*1.000*1.000) + C1d*0.000^3/(6*1.000*1.000) + C2d*0.000^2/(2*1.000*1.000) + C3d*0.000/(1.000*1.000) + C4d/(1.000*1.000) = 0$$

Nó 3 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Móvel interno:

Para $x = 0.500$

$$\text{Eq. 11: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-1.000*0.500^2/2 + C1e*0.500 + C2e) - (-1.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = -(0.000)$$

$$\text{Eq. 12: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -1.000*0.500^3/(6*1.000*1.000) + C1e*0.500^2/(2*1.000*1.000) + C2e*0.500/(1.000*1.000) + C3e/(1.000*1.000) = -1.000*0.000^3/(6*1.000*1.000) + C1d*0.000^2/(2*1.000*1.000) + C2d*0.000/(1.000*1.000) + C3d/(1.000*1.000)$$

$$\text{Eq. 13: } v_e(x) = 0: -1.000*(0.500^4)/(24*1.000*1.000) + C1e*0.500^3/(6*1.000*1.000) + C2e*0.500^2/(2*1.000*1.000) + C3e*0.500/(1.000*1.000) + C4e/(1.000*1.000) = 0$$

$$\text{Eq. 14: } v_d(x) = 0: -1.000*(0.000^4)/(24*1.000*1.000) + C1d*0.000^3/(6*1.000*1.000) + C2d*0.000^2/(2*1.000*1.000) + C3d*0.000/(1.000*1.000) + C4d/(1.000*1.000) = 0$$

Nó 4 - Equações de compatibilização de trechos para Rótula:

Para $x = 0.500$

$$\text{Eq. 15: } Q_e(x) - Q_d(x) = P \rightarrow (-1.000*0.500 + C1e) - (-1.000*0.000 + C1d) = 0.000$$

$$\text{Eq. 16: } M_e(x) = 0: -(0.000) - 1.000*0.500^2/2 + C1e*0.500 + C2e = 0$$

$$\text{Eq. 17: } M_d(x) = 0: -(0.000) - 1.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d = 0$$

$$\text{Eq. 18: } v_e(x) = v_d(x) \rightarrow -1.000*(0.500^4)/(24*1.000*1.000) + C1e*0.500^3/(6*1.000*1.000) + C2e*0.500^2/(2*1.000*1.000) + C3e*0.500/(1.000*1.000) + C4e/(1.000*1.000) = -1.000*(0.000^4)/(24*1.000*1.000) + C1d*0.000^3/(6*1.000*1.000) + C2d*0.000^2/(2*1.000*1.000) + C3d*0.000/(1.000*1.000) + C4d/(1.000*1.000)$$

Nó 5 - Condições de contorno para Apoio Móvel no último nó:

Para $x = 1.500$

$$\text{Eq. 19: } M(x) = M: -0.000 - 1.000*1.500^2/2 + C1*1.500 + C2 = 0$$

$$\text{Eq. 20: } v(x) = 0: -1.000*(1.500^4)/(24*1.000*1.000) + C1*1.500^3/(6*1.000*1.000) + C2*1.500^2/(2*1.000*1.000) + C3*1.500/(1.000*1.000) + C4/(1.000*1.000) = 0$$

Montando as equações num sistema global matricial do tipo $A \cdot C = B$, temos:

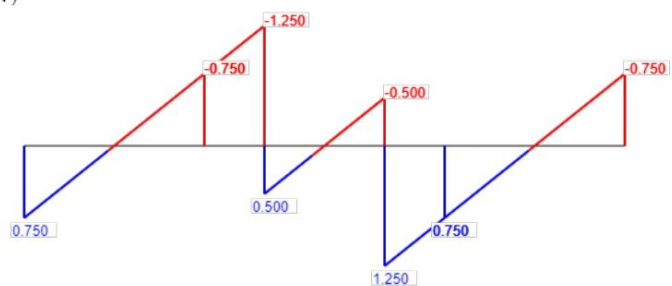
Eq.	C1,0	C2,0	C3,0	C4,0	C1,1	C2,1	C3,1	C4,1	C1,2	C2,2	C3,2	C4,2	C1,3	C2,3	C3,3	C4,3	C1,4	C2,4	C3,4	C4,4	B
1	0.00 00	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00
2	0.00 00	0.00 00	0.00 00	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00

3	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	-1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	1.50 0
4	1.50 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	1.12 5
5	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00
6	0.56 3	1.12 5	1.50 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	-1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.21 1
7	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.50 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	-1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.12 5
8	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.12 5	0.50 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	-1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.02 08
9	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.02 08	0.12 5	0.50 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 260
10	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	-1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00
11	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	1.00 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	-1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.50 0
12	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.50 0	1.00 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	-1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.16 7
13	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.16 7	0.50 0	1.00 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.04 17
14	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	-1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00
15	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	-1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.50 0
16	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.50 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.12 5
17	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00
18	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.02 08	0.12 5	0.50 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	-1.00 0	0.00 260
19	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	1.50 0	1.00 0	0.00 00	0.00 00	1.12 5
20	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.56 2	1.12 5	1.50 0	1.00 0	0.21 1

Resolvendo o sistema linear de equações pelo Método de Gauss (vide <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>), encontram-se os valores das constantes C1 a C4 de cada trecho e, portando, as equações dos esforços de cada trecho (diagramas).

Abaixo seguem os diagramas (no sistema kN-m):

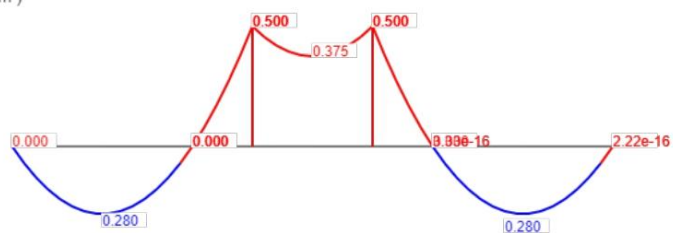
CORTANTE (kN)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).

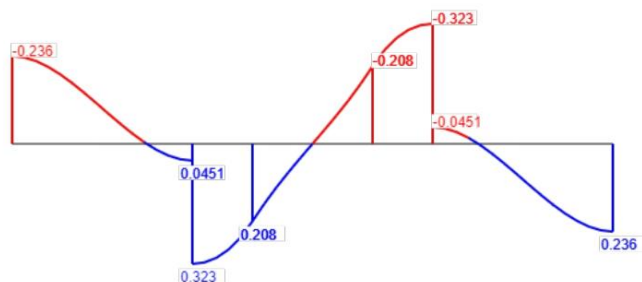
MOMENTO (kN*m)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).

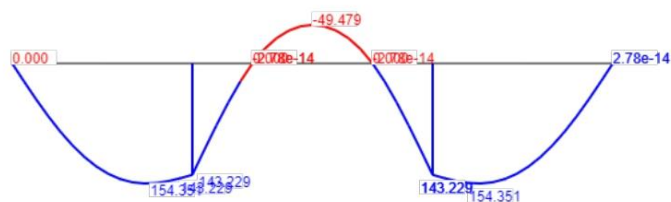
GIRO: (rad)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).

DESLOCAMENTO (mm)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R.Jr. Resistência dos materiais. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2011.

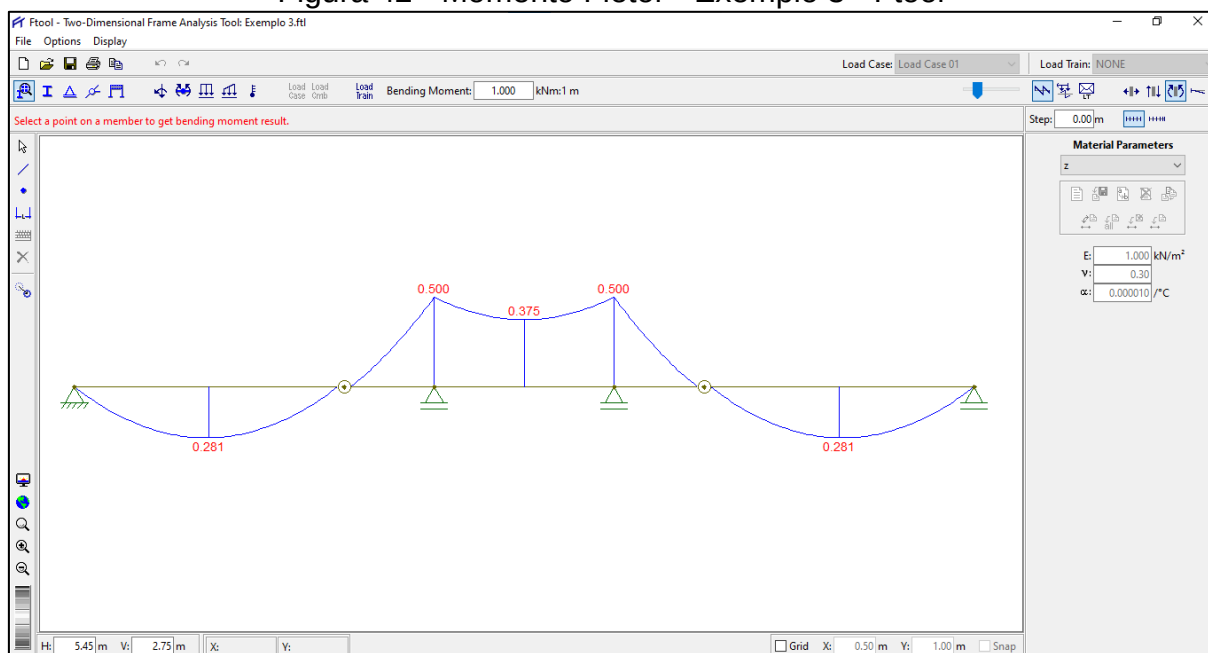
BITTENCOURT, Marco Lúcio. CAPÍTULO 6: Viga. Unicamp, 2003. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em421/seml-1999/textos/viga.pdf>>. Acesso em: 23 jul. 2020.

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini Proença. Curso de resistência dos materiais. Notas de aula – vol. 1. São Carlos: USP, 2003.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do programa já disponível *on-line*.

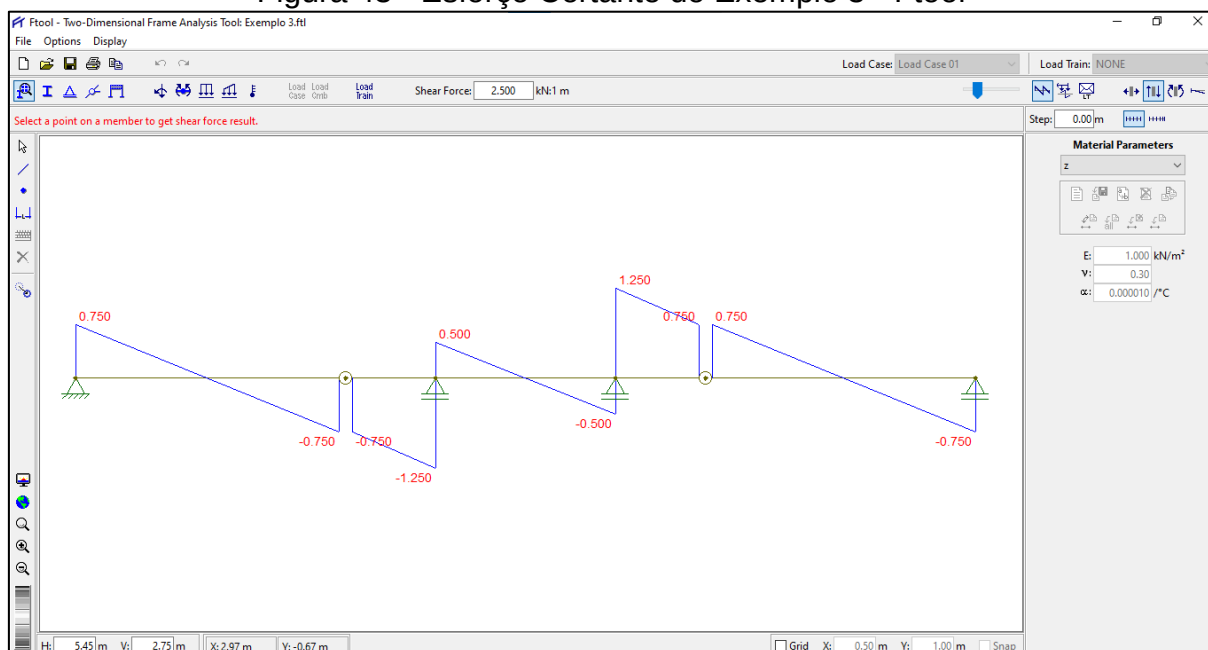
Note que os diagramas gerados são exatamente os apresentados no exemplo 3 do item 2.1.1.3, observando-se que as convenções dos diagramas de cortante, momento e giro são invertidas. Como instrumento de validação adicional, seguem os diagramas fornecidos pelo *software* Ftool (Figuras 42 a 45).

Figura 42 - Momento Fletor - Exemplo 3 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

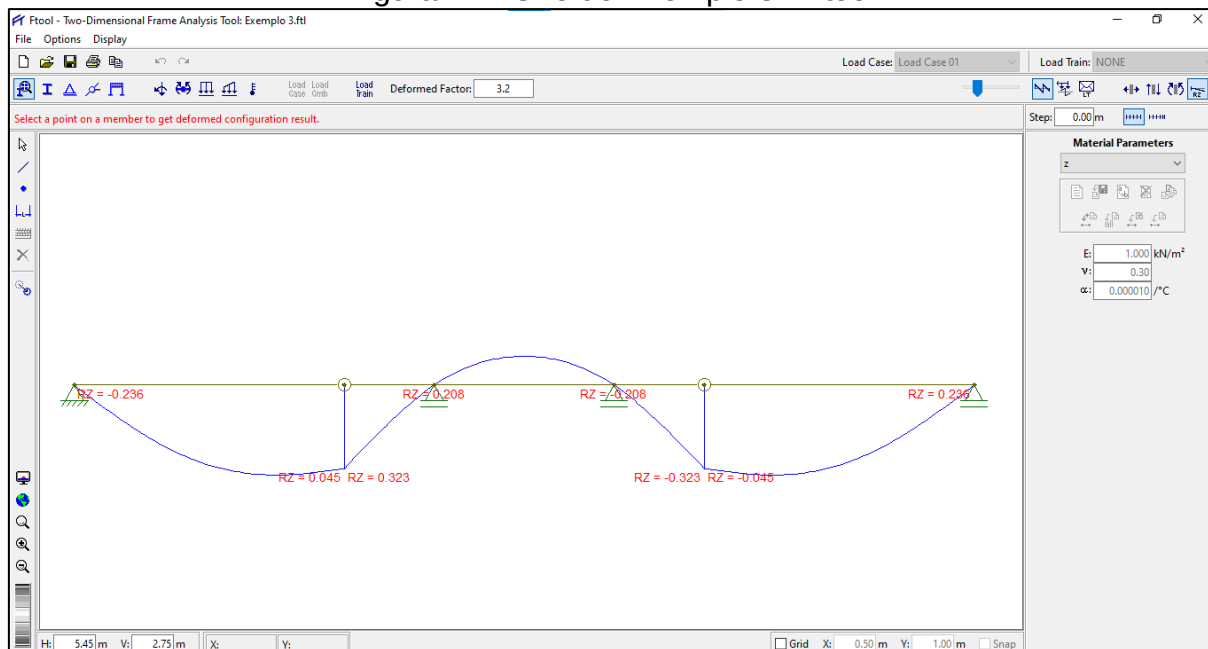
Figura 43 - Esforço Cortante do Exemplo 3 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Vale ressaltar que o diagrama de cortante do FTOOL convencionou positivo abaixo, ao contrário do módulo apresentado neste trabalho.

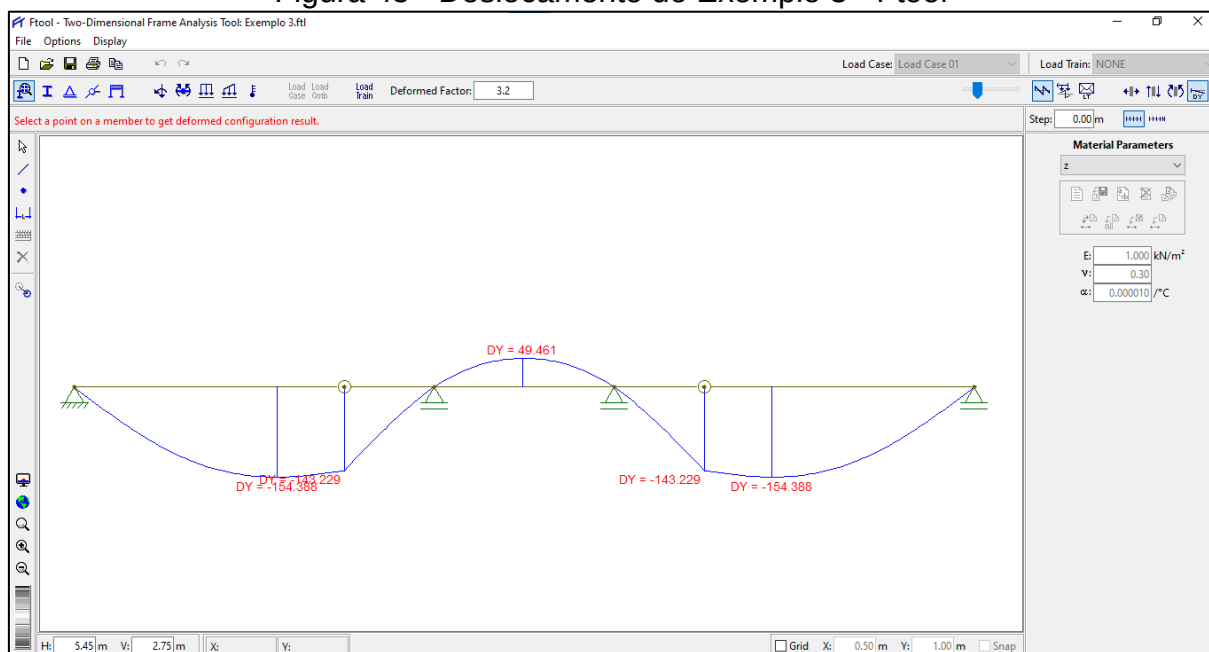
Figura 44 - Giro do Exemplo 3 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Vale ressaltar que o Ftool atribui, por convenção, os valores de giro da estrutura no diagrama de deslocamento.

Figura 45 - Deslocamento do Exemplo 3 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

A.3 - EXEMPLO 4 – RESULTADO

Segue, na Figura 46, o exemplo 4 de uma estrutura com diferentes combinações de vínculos, esforços e características geométricas.

Figura 46 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 4

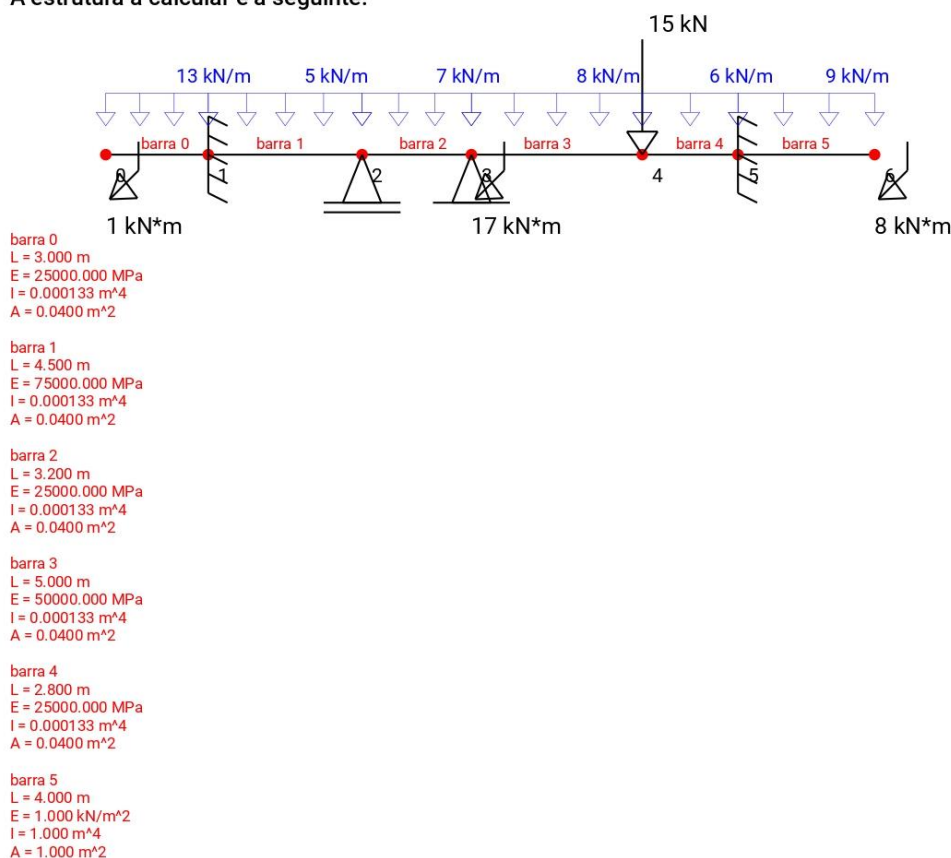
TO TRANSLATE THIS DOCUMENT, DOWNLOAD THE PDF REPORT AND TRANSLATE ON <https://www.onlinedoctranslator.com/pt/> (FREE - GENERATE COMPLETE PDF TRANSLATED FILE) OR TRANSLATE ON <https://translate.google.com/> (SELECT DOCUMENTS - FREE - BUT ONLY TRANSLATE TEXT)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Voluporanga

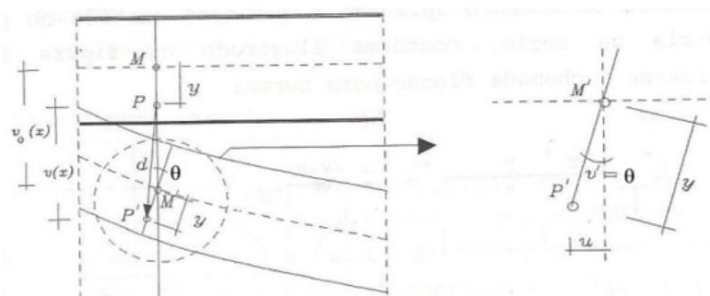
NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
Título: Vigas - Método de Euler-Bernoulli
Autor: Alex Sandro Silva Coelho
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
Tipo: Iniciação Científica com Bolsa Institucional/TCC
Curso: Engenharia Civil
Data da versão original: 30/11/2020
Data da última atualização: 08/12/2021
Data da geração do relatório: 10/12/2021

A estrutura a calcular é a seguinte:



Será desenvolvido aqui o Método da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, conforme Proença (2003). O modelo proposto supõe que o movimento de deformação que ocorre em uma viga submetida à flexão não altera a geometria das seções, que são planas originalmente (seção que passa por M e P na figura 1); ou seja, essas seções continuarão a ser planas e ortogonais ao eixo da viga mesmo após estarem deformadas (seção que passa por M' e P' da figura 1), não importando a distância longitudinal da extremidade.

Figura 1 - Deformação de viga no modelo de Euler-Bernoulli.



Fonte: Adaptado de Proença (2003, p. 98)

Após o desenvolvimento matemático, partir das hipóteses acima, da Lei de Hooke, do equilíbrio de forças e momentos e da limitação do problema a pequenos deslocamentos, Proença (2003), para cada trecho de viga delimitado pela continuidade das funções dos esforços e deslocamentos, chega a:

$\frac{d^2 M}{dx^2} = p$	$\frac{dM}{dx} = Q$	$M = E * I * \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$	$\theta = E * I * \frac{dv(x)}{dx}$	$E * I * v(x)$
p (ação distribuída)	Q (cortante)	M (momento fletor)	θ (giro)	v (deslocamento)

Conforme Proença (2003), quando houver alterações ou descontinuidade das funções $q(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $v(x)$ ou $\theta(x)$, a viga deverá ser dividida em trechos. Posto isso, os casos mais comuns decorrentes são:

- Apoios intermediários;
- Ação (força ou momento) concentrada;
- Variação da rigidez à flexão.

Sendo assim, cada trecho de viga terá o equacionamento, sendo as constantes C1 a C4 determinadas em função das condições de contorno do trecho:

$$\text{Cortante: } Q(x) = -p^*x + C_1$$

$$\text{Momento Fletor: } M(x) = -\left(\frac{p^*x^2}{2}\right) + C_1x + C_2$$

$$\text{Giro: } E \cdot I \cdot \theta(x) = -\left(\frac{p^*x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_1x^2}{2}\right) + C_2x + C_3$$

$$\text{Deslocamento: } E \cdot I \cdot v(x) = -\left(\frac{p^*x^4}{24}\right) + \left(\frac{C_1x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_2x^2}{2}\right) + C_3x + C_4$$

Ao final, portanto, haverá um sistema de equações para determinar as constantes C1 a C4 de cada trecho

ATENÇÃO: A PARTIR DAQUI, O PROGRAMA INTERNAMENTE TRABALHA NO SISTEMA kN-m.

Abaixo segue a resolução.

A ordem do sistema é (4 x n° de trechos): 24

Barra 0 - Nós(0 - 1)

Módulo de Elasticidade (E): 25000000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 0.000133m⁴

Comprimento da Barra (L): 3.000m

Barra 1 - Nós(1 - 2)

Módulo de Elasticidade (E): 75000000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 0.000133m⁴

Comprimento da Barra (L): 4.500m

Barra 2 - Nós(2 - 3)

Módulo de Elasticidade (E): 25000000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 0.000133m⁴

Comprimento da Barra (L): 3.200m

Barra 3 - Nós(3 - 4)

Módulo de Elasticidade (E): 50000000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 0.000133m⁴

Comprimento da Barra (L): 5.000m

Barra 4 - Nós(4 - 5)

Módulo de Elasticidade (E): 25000000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 0.000133m⁴

Comprimento da Barra (L): 2.800m

Barra 5 - Nós(5 - 6)

Módulo de Elasticidade (E): 1.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 4.000m

Condições de Contorno

As condições de contorno que serão aplicadas para a resolução dos cálculos posteriores são adotadas conforme o tipo de apoio que o nó apresenta: móvel, fixo, engaste, rótula ou livre. Ademais, elas mudam se os apoios forem nas extremidades ou internos (para o caso de mais de uma barra na estrutura). Posto isso, abaixo têm-se o detalhamento das características de cada condição de contorno conforme o tipo de apoio.

Para os apoios que se encontram nas extremidades da estrutura, as equações de condições de contorno são mais simples. Logo, usa-se:

Obs: será utilizada a letra P para força e M para momento concentrado.

Apoio Móvel:

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Apoio Fixo:

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Engaste:

$$\theta(x) = 0 \rightarrow -q \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x/E \cdot I + C3/E \cdot I = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Livre:

$$Q(x) = P \rightarrow -P - q \cdot x + C1 = 0$$

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

Rótula: Não é possível haver rótulas nas extremidades de uma estrutura

Para os apoios que se encontram internamente na estrutura, as equações de compatibilização dos trechos abordam mais características. Desse modo, tem-se que:

Obs: será utilizada a letra "e" para lado esquerdo do ponto e "d" para lado direito.

Apoio Móvel:

$$M_e(x_e) - M_d(x_d) = M \rightarrow (-q_e \cdot x_e^2/2 + C1_e \cdot x_e + C2_e) - (-q_d \cdot x_d^2/2 + C1_d \cdot x_d + C2_d) = M$$

$$\theta_e(x_e) = \theta_d(x_d) \rightarrow -q_e \cdot x_e^3/6 \cdot E_e \cdot I_e + C1_e \cdot x_e^2/2 \cdot E_e \cdot I_e + C2_e \cdot x_e/E_e \cdot I_e + C3_e/E_e \cdot I_e = -q_d \cdot x_d^3/6 \cdot E_d \cdot I_d + C1_d \cdot x_d^2/2 \cdot E_d \cdot I_d + C2_d \cdot x_d/E_d \cdot I_d + C3_d/E_d \cdot I_d$$

$$v_e(x_e) = 0 \rightarrow -q_e \cdot (x_e^4)/24 \cdot E_e \cdot I_e + C1_e \cdot x_e^3/6 \cdot E_e \cdot I_e + C2_e \cdot x_e^2/2 \cdot E_e \cdot I_e + C3_e \cdot x_e/E_e \cdot I_e + C4_e/E_e \cdot I_e = 0$$

$$v_d(x_d) = 0 \rightarrow -q_d \cdot (x_d^4)/24 \cdot E_d \cdot I_d + C1_d \cdot x_d^3/6 \cdot E_d \cdot I_d + C2_d \cdot x_d^2/2 \cdot E_d \cdot I_d + C3_d \cdot x_d/E_d \cdot I_d + C4_d/E_d \cdot I_d = 0$$

Apoio Fixo:

$$M_e(x_e) - M_d(x_d) = M \rightarrow (-q_e \cdot x_e^2/2 + C1_e \cdot x_e + C2_e) - (-q_d \cdot x_d^2/2 + C1_d \cdot x_d + C2_d) = M$$

$$\theta_e(x_e) = \theta_d(x_d) \rightarrow -q_e \cdot x_e^3/6 \cdot E_e \cdot I_e + C1_e \cdot x_e^2/2 \cdot E_e \cdot I_e + C2_e \cdot x_e/E_e \cdot I_e + C3_e/E_e \cdot I_e = -q_d \cdot x_d^3/6 \cdot E_d \cdot I_d + C1_d \cdot x_d^2/2 \cdot E_d \cdot I_d + C2_d \cdot x_d/E_d \cdot I_d + C3_d/E_d \cdot I_d$$

$$v_e(x_e) = 0 \rightarrow -q_e \cdot (x_e^4)/24 \cdot E_e \cdot I_e + C1_e \cdot x_e^3/6 \cdot E_e \cdot I_e + C2_e \cdot x_e^2/2 \cdot E_e \cdot I_e + C3_e \cdot x_e/E_e \cdot I_e + C4_e/E_e \cdot I_e = 0$$

$$vd(xd) = 0 \rightarrow -qd*(xd^4)/24*Ed*Id + C1d*xd^3/6*Ed*Id + C2d*xd^2/2*Ed*Id + C3d*xd/Ed*Id + C4d/Ed*Id = 0$$

Engaste:

$$\begin{aligned}\theta e(xe) &= 0 \rightarrow -qe*xe^3/6*Ee*Ie + C1e*xe^2/2*Ee*Ie + C2e*xe/Ee*Ie + C3e/Ee*Ie = 0 \\ \theta d(xd) &= 0 \rightarrow -qd*xd^3/6*Ed*Id + C1d*xd^2/2*Ed*Id + C2d*xd/Ed*Id + C3d/Ed*Id = 0 \\ ve(xe) &= 0 \rightarrow -qe*(xe^4)/24*Ee*Ie + C1e*xe^3/6*Ee*Ie + C2e*xe^2/2*Ee*Ie + C3e*xe/Ee*Ie + C4e/Ee*Ie = 0 \\ vd(xd) &= 0 \rightarrow -qd*(xd^4)/24*Ed*Id + C1d*xd^3/6*Ed*Id + C2d*xd^2/2*Ed*Id + C3d*xd/Ed*Id + C4d/Ed*Id = 0\end{aligned}$$

Rótula:

$$\begin{aligned}Qe(xe) - Qd(xd) &= P \rightarrow (-qe*xe + C1e) - (-qd*xd + C1d) = P \\ Me(xe) &= M \rightarrow -M - qe*xe^2/2 + C1e*xe + C2e = 0 \\ Md(xd) &= M \rightarrow -M - qd*xd^2/2 + C1d*xd + C2d = 0 \\ ve(xe) = vd(xd) &\rightarrow -qe*(xe^4)/24*Ee*Ie + C1e*xe^3/6*Ee*Ie + C2e*xe^2/2*Ee*Ie + C3e*xe/Ee*Ie + C4e/Ee*Ie = \\ &= -qd*(xd^4)/24*Ed*Id + C1d*xd^3/6*Ed*Id + C2d*xd^2/2*Ed*Id + C3d*xd/Ed*Id + C4d/Ed*Id\end{aligned}$$

Livre:

$$\begin{aligned}Qe(xe) - Qd(xd) &= P \rightarrow (-qe*xe + C1e) - (-qd*xd + C1d) = P \\ Me(xe) - Md(xd) &= M \rightarrow (-qe*xe^2/2 + C1e*xe + C2e) - (-qd*xd^2/2 + C1d*xd + C2d) = M \\ \theta e(xe) = \theta d(xd) &\rightarrow -qe*xe^3/6*Ee*Ie + C1e*xe^2/2*Ee*Ie + C2e*xe/Ee*Ie + C3e/Ee*Ie = -qd*xd^3/6*Ed*Id + \\ &+ C1d*xd^2/2*Ed*Id + C2d*xd/Ed*Id + C3d/Ed*Id \\ ve(xe) = vd(xd) &\rightarrow -qe*(xe^4)/24*Ee*Ie + C1e*xe^3/6*Ee*Ie + C2e*xe^2/2*Ee*Ie + C3e*xe/Ee*Ie + C4e/Ee*Ie = \\ &= -qd*(xd^4)/24*Ed*Id + C1d*xd^3/6*Ed*Id + C2d*xd^2/2*Ed*Id + C3d*xd/Ed*Id + C4d/Ed*Id\end{aligned}$$

Haja vista os apoios da estrutura aqui relatada, as equações a serem utilizadas nos cálculos são:

Nó 0 - Condições de contorno para Apoio Livre no primeiro nó:

Para $x = 0$

$$\text{Eq. 1: } Q(x) = P: -13.000*0 + C1 = 0.000$$

$$\text{Eq. 2: } M(x) = M: -13.000*0^2/2 + C1*0 + C2 = -(-1.000)$$

Nó 1 - Equações de compatibilização de trechos para Engaste interno:

Para $x = 2.800$

$$\text{Eq. 3: } \theta e(x) = 0: -13.000*2.800^3/(6*25000000.000*0.000133) + C1e*2.800^2/(2*25000000.000*0.000133) + C2e*2.800/(25000000.000*0.000133) + C3e/(25000000.000*0.000133) = 0$$

$$\text{Eq. 4: } \theta d(x) = 0: -9.000*0.000^3/(6*75000000.000*0.000133) + C1d*0.000^2/(2*75000000.000*0.000133) + C2d*0.000/(75000000.000*0.000133) + C3d/(75000000.000*0.000133) = 0$$

$$\text{Eq. 5: } ve(x) = 0: -13.000*(2.800^4)/(24*25000000.000*0.000133) + C1e*2.800^3/(6*25000000.000*0.000133) + C2e*2.800^2/(2*25000000.000*0.000133) + C3e*2.800/(25000000.000*0.000133) + C4e/(25000000.000*0.000133) = 0$$

$$\text{Eq. 6: } vd(x) = 0: -9.000*(0.000^4)/(24*75000000.000*0.000133) + C1d*0.000^3/(6*75000000.000*0.000133) + C2d*0.000^2/(2*75000000.000*0.000133) + C3d*0.000/(75000000.000*0.000133) + C4d/(75000000.000*0.000133) = 0$$

Nó 2 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Móvel interno:

Para $x = 2.800$

$$\text{Eq. 7: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-5.000 \cdot 2.800^2 / 2 + C1e \cdot 2.800 + C2e) - (-9.000 \cdot 0.000^2 / 2 + C1d \cdot 0.000 + C2d) = - (0.000)$$

$$\text{Eq. 8: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -5.000 \cdot 2.800^3 / (6 \cdot 75000000.000 \cdot 0.000133) + C1e \cdot 2.800^2 / (2 \cdot 75000000.000 \cdot 0.000133) + C2e \cdot 2.800 / (75000000.000 \cdot 0.000133) + C3e / (75000000.000 \cdot 0.000133) = -9.000 \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C1d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C2d \cdot 0.000 / (25000000.000 \cdot 0.000133) + C3d / (25000000.000 \cdot 0.000133)$$

$$\text{Eq. 9: } v_e(x) = 0: -5.000 \cdot (2.800^4) / (24 \cdot 75000000.000 \cdot 0.000133) + C1e \cdot 2.800^3 / (6 \cdot 75000000.000 \cdot 0.000133) + C2e \cdot 2.800^2 / (2 \cdot 75000000.000 \cdot 0.000133) + C3e \cdot 2.800 / (75000000.000 \cdot 0.000133) + C4e / (75000000.000 \cdot 0.000133) = 0$$

$$\text{Eq. 10: } v_d(x) = 0: -9.000 \cdot (0.000^4) / (24 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C1d \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C2d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C3d \cdot 0.000 / (25000000.000 \cdot 0.000133) + C4d / (25000000.000 \cdot 0.000133) = 0$$

Nó 3 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Fixo interno:

Para $x = 2.800$

$$\text{Eq. 11: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-7.000 \cdot 2.800^2 / 2 + C1e \cdot 2.800 + C2e) - (-9.000 \cdot 0.000^2 / 2 + C1d \cdot 0.000 + C2d) = - (17.000)$$

$$\text{Eq. 12: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -7.000 \cdot 2.800^3 / (6 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C1e \cdot 2.800^2 / (2 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C2e \cdot 2.800 / (25000000.000 \cdot 0.000133) + C3e / (25000000.000 \cdot 0.000133) = -9.000 \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 50000000.000 \cdot 0.000133) + C1d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 50000000.000 \cdot 0.000133) + C2d \cdot 0.000 / (50000000.000 \cdot 0.000133) + C3d / (50000000.000 \cdot 0.000133)$$

$$\text{Eq. 13: } v_e(x) = 0: -7.000 \cdot (2.800^4) / (24 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C1e \cdot 2.800^3 / (6 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C2e \cdot 2.800^2 / (2 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C3e \cdot 2.800 / (25000000.000 \cdot 0.000133) + C4e / (25000000.000 \cdot 0.000133) = 0$$

$$\text{Eq. 14: } v_d(x) = 0: -9.000 \cdot (0.000^4) / (24 \cdot 50000000.000 \cdot 0.000133) + C1d \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 50000000.000 \cdot 0.000133) + C2d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 50000000.000 \cdot 0.000133) + C3d \cdot 0.000 / (50000000.000 \cdot 0.000133) + C4d / (50000000.000 \cdot 0.000133) = 0$$

Nó 4 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 2.800$

$$\text{Eq. 15: } Q_e(x) - Q_d(x) = P \rightarrow (-8.000 \cdot 2.800 + C1e) - (-9.000 \cdot 0.000 + C1d) = 15.000$$

$$\text{Eq. 16: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-8.000 \cdot 2.800^2 / 2 + C1e \cdot 2.800 + C2e) - (-9.000 \cdot 0.000^2 / 2 + C1d \cdot 0.000 + C2d) = - (0.000)$$

$$\text{Eq. 17: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -8.000 \cdot 2.800^3 / (6 \cdot 50000000.000 \cdot 0.000133) + C1e \cdot 2.800^2 / (2 \cdot 50000000.000 \cdot 0.000133) + C2e \cdot 2.800 / (50000000.000 \cdot 0.000133) + C3e / (50000000.000 \cdot 0.000133) = -9.000 \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C1d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 25000000.000 \cdot 0.000133) + C2d \cdot 0.000 / (25000000.000 \cdot 0.000133) + C3d / (25000000.000 \cdot 0.000133)$$

$$\text{Eq. 18: } v_e(x) = v_d(x) \rightarrow -8.000 \cdot (2.800^4) / (24 \cdot 50000000.000 \cdot 0.000133) + C1e \cdot 2.800^3 /$$

$$\begin{aligned} & (6*50000000.000*0.000133) + C2e*2.800^2 / (2*50000000.000*0.000133) + C3e*2.800 / \\ & (50000000.000*0.000133) + C4e / (50000000.000*0.000133) = -9.000*(0.000^4) / \\ & (24*25000000.000*0.000133) + C1d*0.000^3 / (6*25000000.000*0.000133) + C2d*0.000^2 / \\ & (2*25000000.000*0.000133) + C3d*0.000 / (25000000.000*0.000133) + C4d / (25000000.000*0.000133) \end{aligned}$$

Nó 5 - Equações de compatibilização de trechos para Engaste interno:

Para $x = 2.800$

$$\text{Eq. 19: } \theta_e(x) = 0: -6.000*2.800^3 / (6*25000000.000*0.000133) + C1e*2.800^2 / (2*25000000.000*0.000133) + C2e*2.800 / (25000000.000*0.000133) + C3e / (25000000.000*0.000133) = 0$$

$$\text{Eq. 20: } \theta_d(x) = 0: -9.000*0.000^3 / (6*1.000*1.000) + C1d*0.000^2 / (2*1.000*1.000) + C2d*0.000 / (1.000*1.000) + C3d / (1.000*1.000) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. 21: } v_e(x) = 0: & -6.000*(2.800^4) / (24*25000000.000*0.000133) + C1e*2.800^3 / \\ & (6*25000000.000*0.000133) + C2e*2.800^2 / (2*25000000.000*0.000133) + C3e*2.800 / \\ & (25000000.000*0.000133) + C4e / (25000000.000*0.000133) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Eq. 22: } v_d(x) = 0: -9.000*(0.000^4) / (24*1.000*1.000) + C1d*0.000^3 / (6*1.000*1.000) + C2d*0.000^2 / (2*1.000*1.000) + C3d*0.000 / (1.000*1.000) + C4d / (1.000*1.000) = 0$$

Nó 6 - Condições de contorno para Apoio Livre no último nó:

Para $x = 4.000$

$$\text{Eq. 23: } Q(x) = P: -9.000*4.000 + C1 = 0.000$$

$$\text{Eq. 24: } M(x) = M: -9.000*4.000^2 / 2 + C1*4.000 + C2 = -(8.000)$$

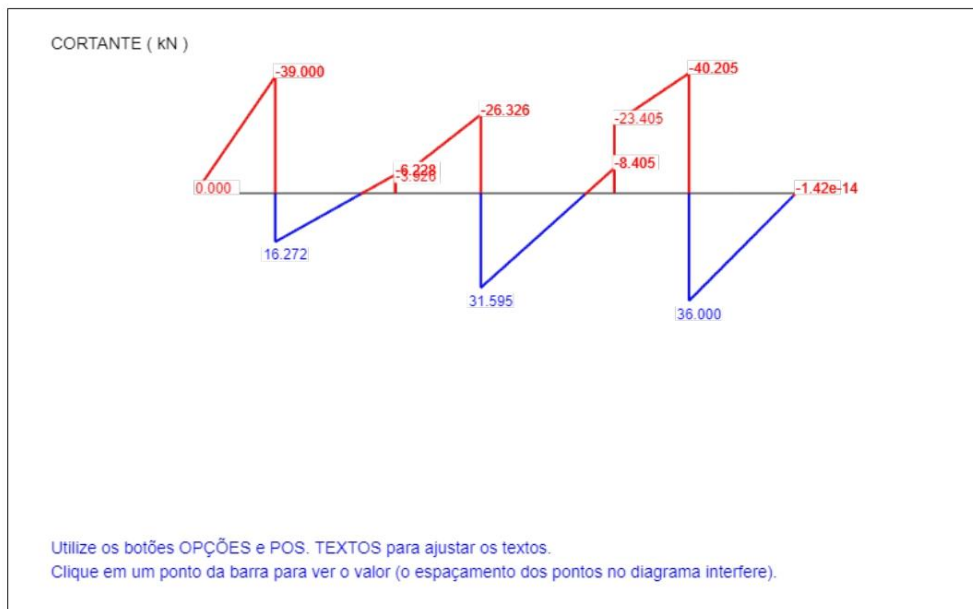
Montando as equações num sistema global matricial do tipo $A*C=B$, temos:

Eq	C1,0	C2,0	C3,0	C4,0	C1,1	C2,1	C3,1	C4,1	C1,2	C2,2	C3,2	C4,2	C1,3	C2,3	C3,3	C4,3	C1,4	C2,4	C3,4	C4,4	C1,5	C2,5	C3,5	C4,5	R
1	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
3	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.017
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.013
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	4.500	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	50.42
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3.200	1.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	18.84
12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.011
13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.009
14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	55.00
16	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	5.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	100.0
17	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.025
18	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.031

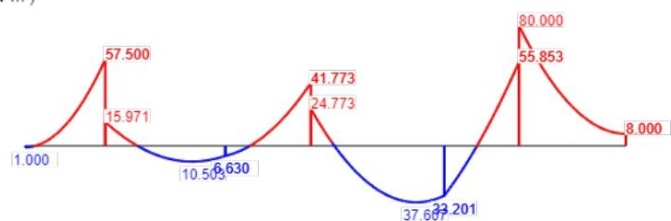
19	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.006
20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000
21	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004
22	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0.000
23	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	36.00
24	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	4.000	1.000	0.000	64.00

Resolvendo o sistema linear de equações pelo Método de Gauss (vide <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>), encontram-se os valores das constantes C1 a C4 de cada trecho e, portando, as equações dos esforços de cada trecho (diagramas).

Abaixo seguem os diagramas (no sistema kN-m):



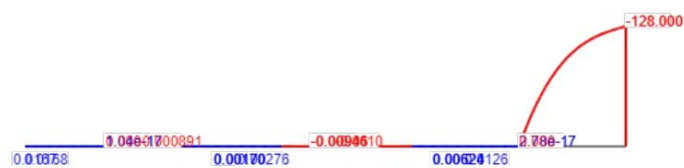
MOMENTO (kN*m)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

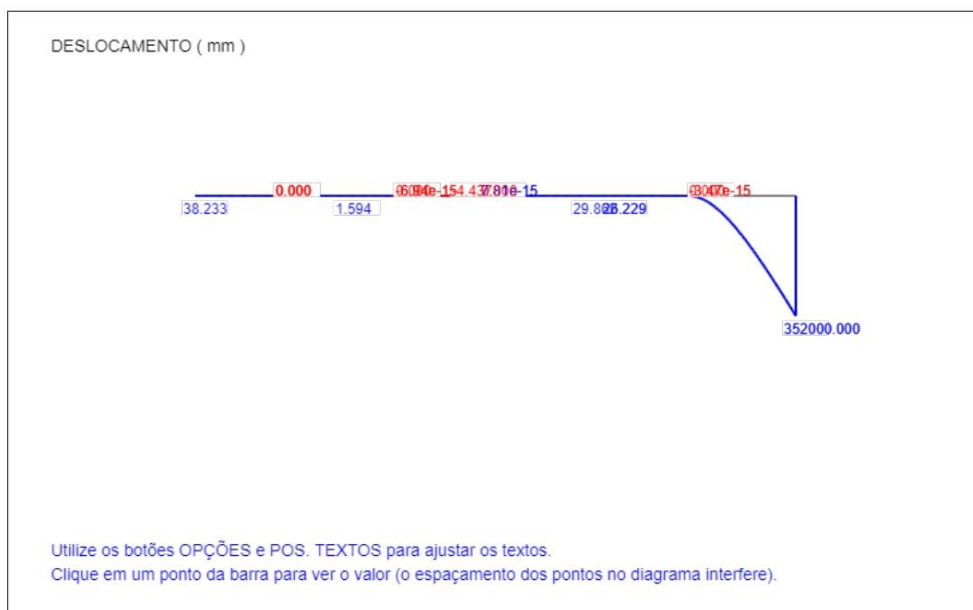
Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).

GIRO: (rad)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R.Jr. Resistência dos materiais. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2011.

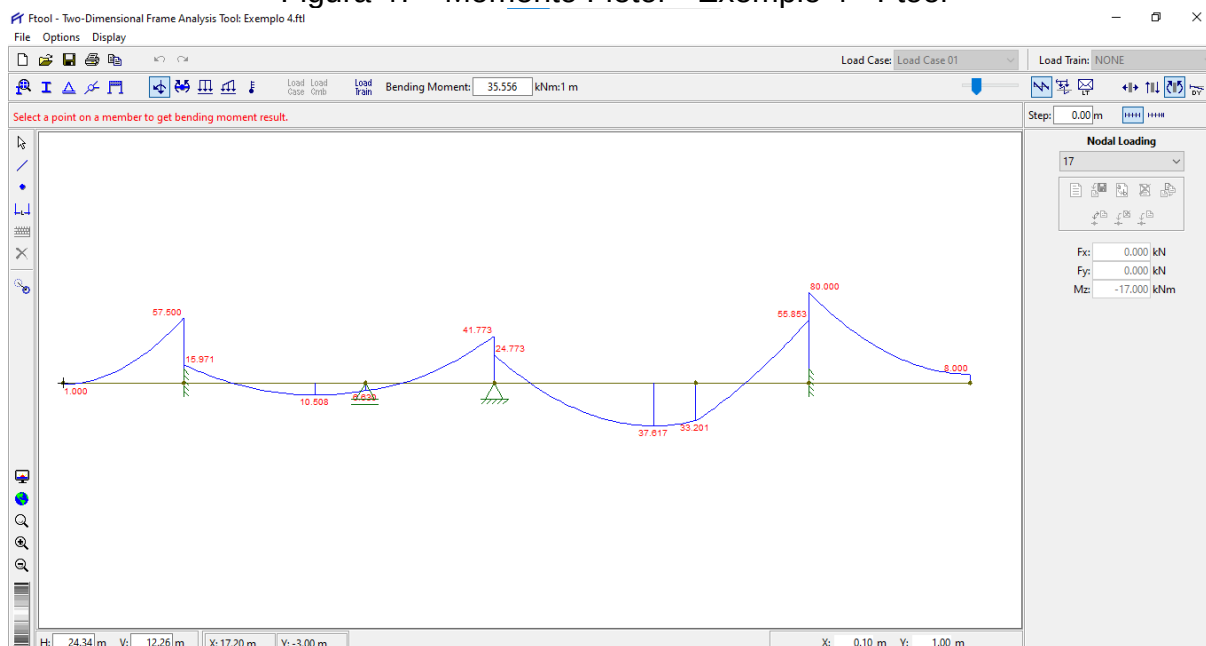
BITTENCOURT, Marco Lúcio. CAPÍTULO 6: Viga. Unicamp, 2003. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em421/semII-1999/textos/viga.pdf>>. Acesso em: 23 jul. 2020.

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini Proença. Curso de resistência dos materiais. Notas de aula – vol. 1. São Carlos: USP, 2003.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do programa já disponível *on-line*.

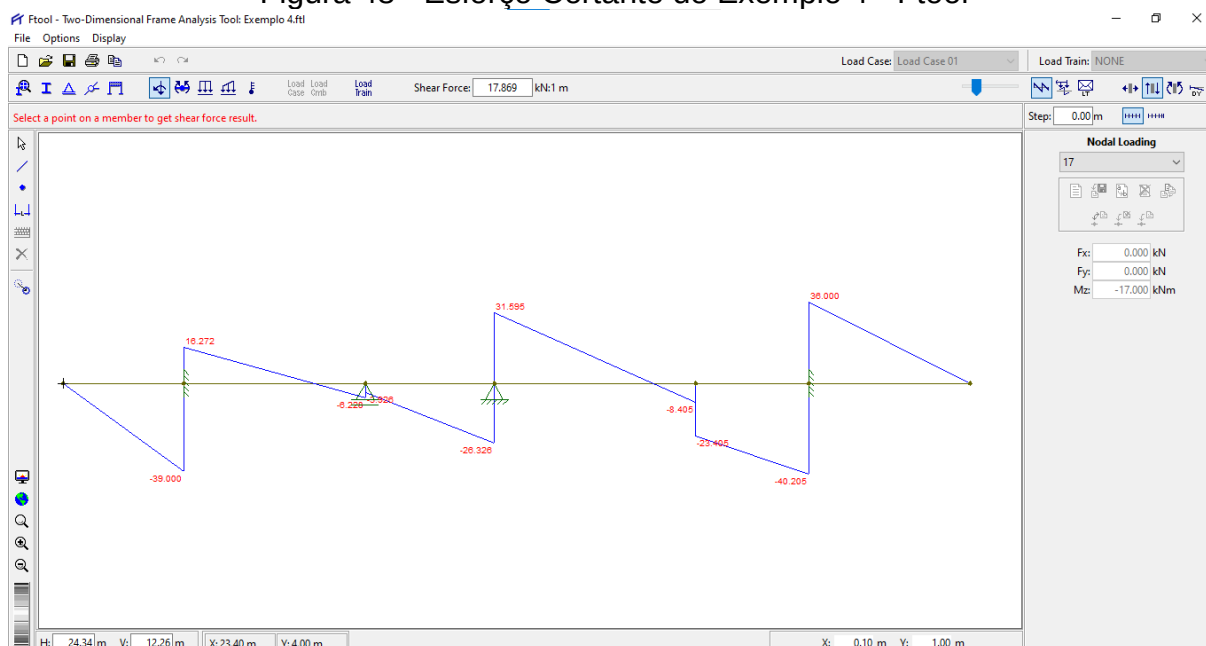
Como instrumento de validação, seguem os diagramas fornecidos pelo *software* Ftool (Figuras 47 a 50).

Figura 47 - Momento Fletor - Exemplo 4 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

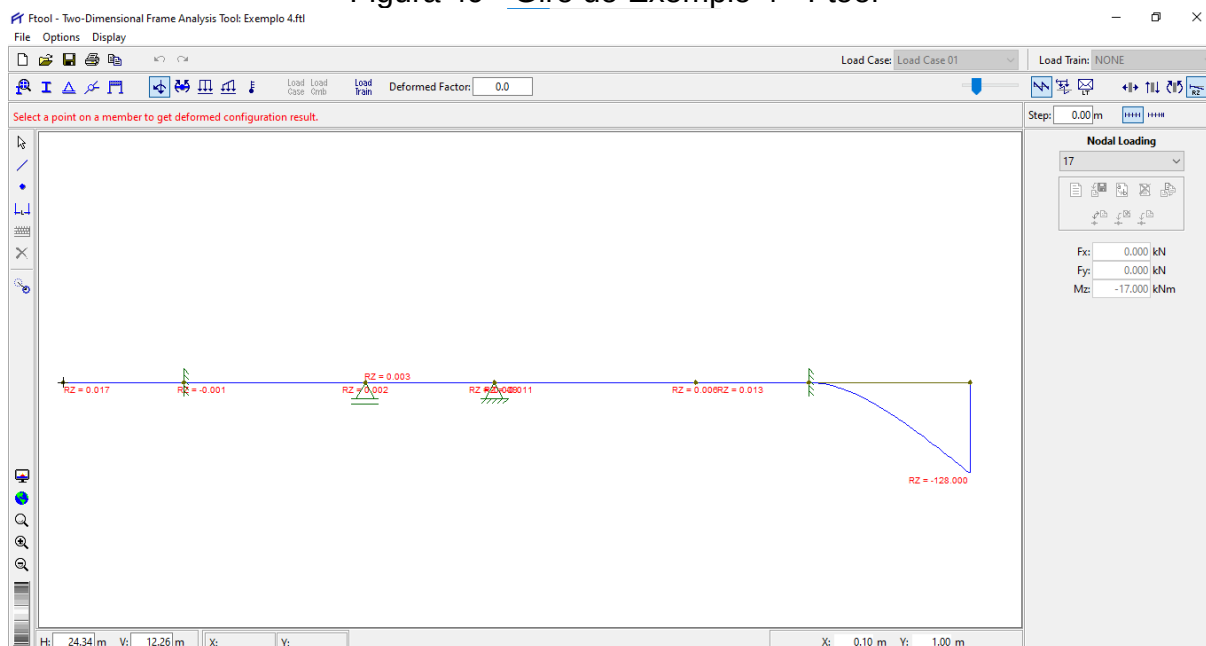
Figura 48 - Esforço Cortante do Exemplo 4 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Vale ressaltar que o diagrama de cortante do FTOOL convencionou positivo abaixo, ao contrário do módulo apresentado neste trabalho.

Figura 49 - Giro do Exemplo 4 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Vale ressaltar que o Ftool atribui, por convenção, os valores de giro da estrutura no diagrama de deslocamento.

Figura 50 - Deslocamento do Exemplo 4 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Nota-se que os diagramas apresentados pelo Ftool coincidem com os diagramas apresentados pelo módulo desenvolvido neste trabalho.

A.4 - EXEMPLO 5 – RESULTADO

Segue, na Figura 51, o exemplo 5 de uma estrutura com diferentes combinações de vínculos, esforços e características geométricas.

Figura 51 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 5

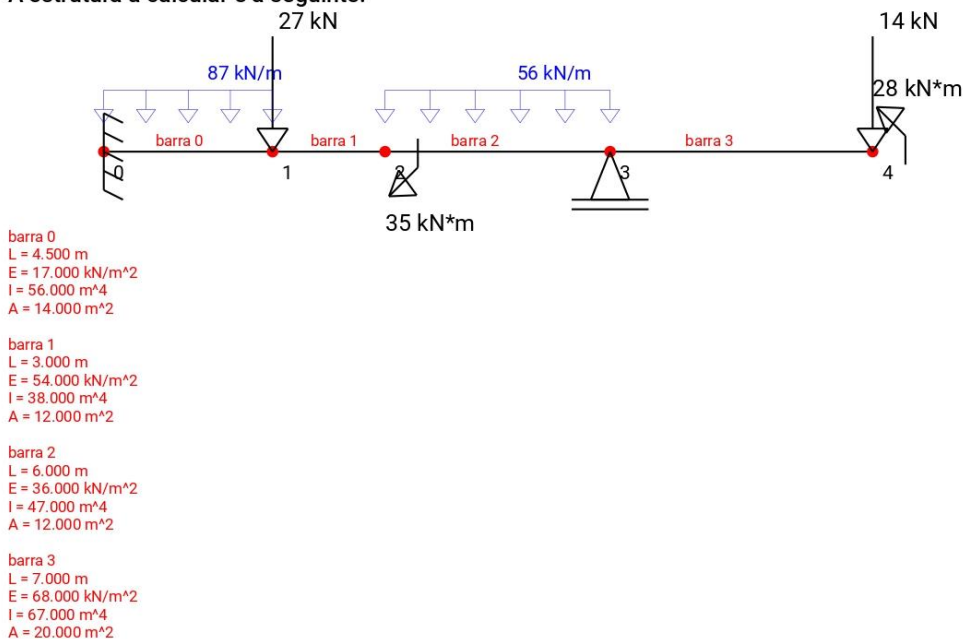
TO TRANSLATE THIS DOCUMENT, DOWNLOAD THE PDF REPORT AND TRANSLATE ON <https://www.onlinedoctranslator.com/pt/> (FREE - GENERATE COMPLETE PDF TRANSLATED FILE) OR TRANSLATE ON <https://translate.google.com/> (SELECT DOCUMENTS - FREE - BUT ONLY TRANSLATE TEXT)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Voluporanga

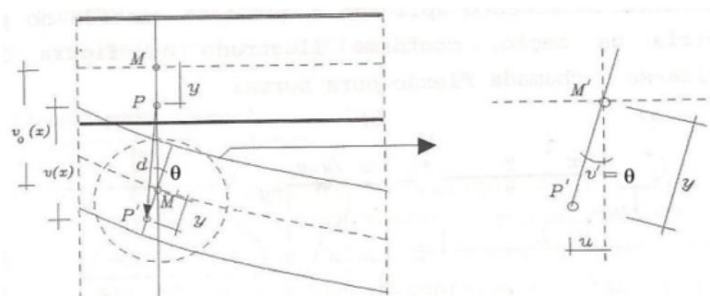
NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
Título: Vigas - Método de Euler-Bernoulli
Autor: Alex Sandro Silva Coelho
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
Tipo: Iniciação Científica com Bolsa Institucional/TCC
Curso: Engenharia Civil
Data da versão original: 30/11/2020
Data da última atualização: 08/12/2021
Data da geração do relatório: 10/12/2021

A estrutura a calcular é a seguinte:



Será desenvolvido aqui o Método da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, conforme Proença (2003). O modelo proposto supõe que o movimento de deformação que ocorre em uma viga submetida à flexão não altera a geometria das seções, que são planas originalmente (seção que passa por M e P na figura 1); ou seja, essas seções continuarão a ser planas e ortogonais ao eixo da viga mesmo após estarem deformadas (seção que passa por M' e P' da figura 1), não importando a distância longitudinal da extremidade.

Figura 1 - Deformação de viga no modelo de Euler-Bernoulli.



Fonte: Adaptado de Proença (2003, p. 98)

Após o desenvolvimento matemático, partir das hipóteses acima, da Lei de Hooke, do equilíbrio de forças e momentos e da limitação do problema a pequenos deslocamentos, Proença (2003), para cada trecho de viga delimitado pela continuidade das funções dos esforços e deslocamentos, chega a:

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> ← INTEGRAL → </div>				
$\frac{d^2 M}{dx^2} = p$	$\frac{dM}{dx} = Q$	$M = E \cdot I \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$	$\theta = E \cdot I \cdot \frac{dv(x)}{dx}$	$E \cdot I \cdot v(x)$
<p>p (ação distribuída)</p>	<p>Q (cortante)</p>	<p>M (momento fletor)</p>	<p>θ (giro)</p>	<p>v (deslocamento)</p>
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> ← DERIVADA → </div>				

Conforme Proença (2003), quando houver alterações ou descontinuidade das funções $q(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $v(x)$ ou $\theta(x)$, a viga deverá ser dividida em trechos. Posto isso, os casos mais comuns decorrentes são:

- Apoios intermediários;
- Ação (força ou momento) concentrada;
- Variação da rigidez à flexão.

Sendo assim, cada trecho de viga terá o equacionamento, sendo as constantes C1 a C4 determinadas em função das condições de contorno do trecho:

$$\text{Cortante: } Q(x) = -p \cdot x + C_1$$

$$\text{Momento Fletor: } M(x) = -\left(\frac{p \cdot x^2}{2}\right) + C_1 \cdot x + C_2$$

$$\text{Giro: } E \cdot I \cdot \theta(x) = -\left(\frac{p \cdot x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_1 \cdot x^2}{2}\right) + C_2 \cdot x + C_3$$

$$\text{Deslocamento: } E \cdot I \cdot v(x) = -\left(\frac{p \cdot x^4}{24}\right) + \left(\frac{C_1 \cdot x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_2 \cdot x^2}{2}\right) + C_3 \cdot x + C_4$$

Ao final, portanto, haverá um sistema de equações para determinar as constantes C1 a C4 de cada trecho

ATENÇÃO: A PARTIR DAQUI, O PROGRAMA INTERNAMENTE TRABALHA NO SISTEMA kN-m.

Abaixo segue a resolução.

A ordem do sistema é (4 x nº de trechos): 16

Barra 0 - Nós(0 - 1)

Módulo de Elasticidade (E): 17.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 56.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 4.500m

Barra 1 - Nós(1 - 2)

Módulo de Elasticidade (E): 54.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 38.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 3.000m

Barra 2 - Nós(2 - 3)

Módulo de Elasticidade (E): 36.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 47.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 6.000m

Barra 3 - Nós(3 - 4)

Módulo de Elasticidade (E): 68.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 67.000m⁴

Comprimento da Barra (L): 7.000m

Condições de Contorno

As condições de contorno que serão aplicadas para a resolução dos cálculos posteriores são adotadas conforme o tipo de apoio que o nó apresenta: móvel, fixo, engaste, rótula ou livre. Ademais, elas mudam se os apoios forem nas extremidades ou internos (para o caso de mais de uma barra na estrutura). Posto isso, abaixo têm-se o detalhamento das características de cada condição de contorno conforme o tipo de apoio.

Para os apoios que se encontram nas extremidades da estrutura, as equações de condições de contorno são mais simples. Logo, usa-se:

Obs: será utilizada a letra P para força e M para momento concentrado.

Apoio Móvel:

$$M(x) = M \rightarrow -M - q^*x^2/2 + C1^*x + C2 = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q^*(x^4)/24^*E^*I + C1^*x^3/6^*E^*I + C2^*x^2/2^*E^*I + C3^*x/E^*I + C4/E^*I = 0$$

Apoio Fixo:

$$M(x) = M \rightarrow -M - q^*x^2/2 + C1^*x + C2 = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q^*(x^4)/24^*E^*I + C1^*x^3/6^*E^*I + C2^*x^2/2^*E^*I + C3^*x/E^*I + C4/E^*I = 0$$

Engaste:

$$\theta(x) = 0 \rightarrow -q^*x^3/6^*E^*I + C1^*x^2/2^*E^*I + C2^*x/E^*I + C3/E^*I = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q^*(x^4)/24^*E^*I + C1^*x^3/6^*E^*I + C2^*x^2/2^*E^*I + C3^*x/E^*I + C4/E^*I = 0$$

Livre:

$$Q(x) = P \rightarrow -P - q^*x + C1 = 0$$

$$M(x) = M \rightarrow -M - q^*x^2/2 + C1^*x + C2 = 0$$

Rótula: Não é possível haver rótulas nas extremidades de uma estrutura

Para os apoios que se encontram internamente na estrutura, as equações de compatibilização dos trechos abordam mais características. Desse modo, tem-se que:

Obs: será utilizada a letra "e" para lado esquerdo do ponto e "d" para lado direito.

Apoio Móvel:

$$Me(xe) - Md(xd) = M \rightarrow (-qe^*xe^2/2 + C1e^*xe + C2e) - (-qd^*xd^2/2 + C1d^*xd + C2d) = M$$

$$\theta e(xe) = \theta d(xd) \rightarrow -qe^*xe^3/6^*Ee^*Ie + C1e^*xe^2/2^*Ee^*Ie + C2e^*xe/Ee^*Ie + C3e/Ee^*Ie = -qd^*xd^3/6^*Ed^*Id + C1d^*xd^2/2^*Ed^*Id + C2d^*xd/Ed^*Id + C3d/Ed^*Id$$

$$ve(xe) = 0 \rightarrow -qe^*(xe^4)/24^*Ee^*Ie + C1e^*xe^3/6^*Ee^*Ie + C2e^*xe^2/2^*Ee^*Ie + C3e^*xe/Ee^*Ie + C4e/Ee^*Ie = 0$$

$$vd(xd) = 0 \rightarrow -qd^*(xd^4)/24^*Ed^*Id + C1d^*xd^3/6^*Ed^*Id + C2d^*xd^2/2^*Ed^*Id + C3d^*xd/Ed^*Id + C4d/Ed^*Id = 0$$

Apoio Fixo:

$$Me(xe) - Md(xd) = M \rightarrow (-qe^*xe^2/2 + C1e^*xe + C2e) - (-qd^*xd^2/2 + C1d^*xd + C2d) = M$$

$$\theta e(xe) = \theta d(xd) \rightarrow -qe^*xe^3/6^*Ee^*Ie + C1e^*xe^2/2^*Ee^*Ie + C2e^*xe/Ee^*Ie + C3e/Ee^*Ie = -qd^*xd^3/6^*Ed^*Id + C1d^*xd^2/2^*Ed^*Id + C2d^*xd/Ed^*Id + C3d/Ed^*Id$$

$$ve(xe) = 0 \rightarrow -qe^*(xe^4)/24^*Ee^*Ie + C1e^*xe^3/6^*Ee^*Ie + C2e^*xe^2/2^*Ee^*Ie + C3e^*xe/Ee^*Ie + C4e/Ee^*Ie = 0$$

$$vd(xd) = 0 \rightarrow -qd^*(xd^4)/24^*Ed^*Id + C1d^*xd^3/6^*Ed^*Id + C2d^*xd^2/2^*Ed^*Id + C3d^*xd/Ed^*Id + C4d/Ed^*Id = 0$$

Engaste:

$$\theta e(xe) = 0 \rightarrow -qe^*xe^3/6^*Ee^*Ie + C1e^*xe^2/2^*Ee^*Ie + C2e^*xe/Ee^*Ie + C3e/Ee^*Ie = 0$$

$$\theta d(xd) = 0 \rightarrow -qd^*xd^3/6^*Ed^*Id + C1d^*xd^2/2^*Ed^*Id + C2d^*xd/Ed^*Id + C3d/Ed^*Id = 0$$

$$ve(xe) = 0 \rightarrow -qe^*(xe^4)/24^*Ee^*Ie + C1e^*xe^3/6^*Ee^*Ie + C2e^*xe^2/2^*Ee^*Ie + C3e^*xe/Ee^*Ie + C4e/Ee^*Ie = 0$$

$$vd(xd) = 0 \rightarrow -qd^*(xd^4)/24^*Ed^*Id + C1d^*xd^3/6^*Ed^*Id + C2d^*xd^2/2^*Ed^*Id + C3d^*xd/Ed^*Id + C4d/Ed^*Id = 0$$

Rótula:

$$\begin{aligned}
Qe(xe) - Qd(xd) &= P \rightarrow (-qe*xe + C1e) - (-qd*xd + C1d) = P \\
Me(xe) &= M \rightarrow -M - qe*xe^2/2 + C1e*xe + C2e = 0 \\
Md(xd) &= M \rightarrow -M - qd*xd^2/2 + C1d*xd + C2d = 0 \\
ve(xe) = vd(xd) &\rightarrow -qe*(xe^4)/24*Ee*le + C1e*xe^3/6*Ee*le + C2e*xe^2/2*Ee*le + C3e*xe/Ee*le + C4e/Ee*le = \\
&-qd*(xd^4)/24*Ed*ld + C1d*xd^3/6*Ed*ld + C2d*xd^2/2*Ed*ld + C3d*xd/Ed*ld + C4d/Ed*ld
\end{aligned}$$

Livre:

$$\begin{aligned}
Qe(xe) - Qd(xd) &= P \rightarrow (-qe*xe + C1e) - (-qd*xd + C1d) = P \\
Me(xe) - Md(xd) &= M \rightarrow (-qe*xe^2/2 + C1e*xe + C2e) - (-qd*xd^2/2 + C1d*xd + C2d) = M \\
\theta e(xe) = \theta d(xd) &\rightarrow -qe*xe^3/6*Ee*le + C1e*xe^2/2*Ee*le + C2e*xe/Ee*le + C3e/Ee*le = -qd*xd^3/6*Ed*ld + \\
&C1d*xd^2/2*Ed*ld + C2d*xd/Ed*ld + C3d/Ed*ld \\
ve(xe) = vd(xd) &\rightarrow -qe*(xe^4)/24*Ee*le + C1e*xe^3/6*Ee*le + C2e*xe^2/2*Ee*le + C3e*xe/Ee*le + C4e/Ee*le = \\
&-qd*(xd^4)/24*Ed*ld + C1d*xd^3/6*Ed*ld + C2d*xd^2/2*Ed*ld + C3d*xd/Ed*ld + C4d/Ed*ld
\end{aligned}$$

Haja vista os apoios da estrutura aqui relatada, as equações a serem utilizadas nos cálculos são:

Nó 0 - Condições de contorno para Engaste no primeiro nó:

Para $x = 0$

$$\text{Eq. 1: } \theta(x) = 0: -87.000*0^3/(6*17.000*56.000) + C1*0^2/(2*17.000*56.000) + C2*0/(17.000*56.000) + C3/(17.000*56.000) = 0$$

$$\text{Eq. 2: } v(x) = 0: -87.000*(0^4)/(24*17.000*56.000) + C1*0^3/(6*17.000*56.000) + C2*0^2/(2*17.000*56.000) + C3*0/(17.000*56.000) + C4/(17.000*56.000) = 0$$

Nó 1 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 6.000$

$$\text{Eq. 3: } Qe(x) - Qd(x) = P \rightarrow (-87.000*6.000 + C1e) - (-0.000*0.000 + C1d) = 27.000$$

$$\text{Eq. 4: } Me(x) - Md(x) = M \rightarrow (-87.000*6.000^2/2 + C1e*6.000 + C2e) - (-0.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = -(0.000)$$

$$\text{Eq. 5: } \theta e(x) = \theta d(x) \rightarrow -87.000*6.000^3/(6*17.000*56.000) + C1e*6.000^2/(2*17.000*56.000) + C2e*6.000/(17.000*56.000) + C3e/(17.000*56.000) = -0.000*0.000^3/(6*54.000*38.000) + C1d*0.000^2/(2*54.000*38.000) + C2d*0.000/(54.000*38.000) + C3d/(54.000*38.000)$$

$$\text{Eq. 6: } ve(x) = vd(x) \rightarrow -87.000*(6.000^4)/(24*17.000*56.000) + C1e*6.000^3/(6*17.000*56.000) + C2e*6.000^2/(2*17.000*56.000) + C3e*6.000/(17.000*56.000) + C4e/(17.000*56.000) = -0.000*(0.000^4)/(24*54.000*38.000) + C1d*0.000^3/(6*54.000*38.000) + C2d*0.000^2/(2*54.000*38.000) + C3d*0.000/(54.000*38.000) + C4d/(54.000*38.000)$$

Nó 2 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 6.000$

$$\text{Eq. 7: } Qe(x) - Qd(x) = P \rightarrow (-0.000*6.000 + C1e) - (-0.000*0.000 + C1d) = 0.000$$

$$\text{Eq. 8: } Me(x) - Md(x) = M \rightarrow (-0.000*6.000^2/2 + C1e*6.000 + C2e) - (-0.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = -(35.000)$$

Eq. 9: $\theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -0.000 \cdot 6.000^3 / (6 \cdot 54.000 \cdot 38.000) + C1e \cdot 6.000^2 / (2 \cdot 54.000 \cdot 38.000) + C2e \cdot 6.000 / (54.000 \cdot 38.000) + C3e / (54.000 \cdot 38.000) = -0.000 \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 36.000 \cdot 47.000) + C1d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 36.000 \cdot 47.000) + C2d \cdot 0.000 / (36.000 \cdot 47.000) + C3d / (36.000 \cdot 47.000)$

Eq. 10: $v_e(x) = v_d(x) \rightarrow -0.000 \cdot (6.000^4) / (24 \cdot 54.000 \cdot 38.000) + C1e \cdot 6.000^3 / (6 \cdot 54.000 \cdot 38.000) + C2e \cdot 6.000^2 / (2 \cdot 54.000 \cdot 38.000) + C3e \cdot 6.000 / (54.000 \cdot 38.000) + C4e / (54.000 \cdot 38.000) = -0.000 \cdot (0.000^4) / (24 \cdot 36.000 \cdot 47.000) + C1d \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 36.000 \cdot 47.000) + C2d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 36.000 \cdot 47.000) + C3d \cdot 0.000 / (36.000 \cdot 47.000) + C4d / (36.000 \cdot 47.000)$

Nó 3 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Móvel interno:

Para $x = 6.000$

Eq. 11: $M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-56.000 \cdot 6.000^2 / 2 + C1e \cdot 6.000 + C2e) - (-0.000 \cdot 0.000^2 / 2 + C1d \cdot 0.000 + C2d) = -(0.000)$

Eq. 12: $\theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -56.000 \cdot 6.000^3 / (6 \cdot 36.000 \cdot 47.000) + C1e \cdot 6.000^2 / (2 \cdot 36.000 \cdot 47.000) + C2e \cdot 6.000 / (36.000 \cdot 47.000) + C3e / (36.000 \cdot 47.000) = -0.000 \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 68.000 \cdot 67.000) + C1d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 68.000 \cdot 67.000) + C2d \cdot 0.000 / (68.000 \cdot 67.000) + C3d / (68.000 \cdot 67.000)$

Eq. 13: $v_e(x) = 0: -56.000 \cdot (6.000^4) / (24 \cdot 36.000 \cdot 47.000) + C1e \cdot 6.000^3 / (6 \cdot 36.000 \cdot 47.000) + C2e \cdot 6.000^2 / (2 \cdot 36.000 \cdot 47.000) + C3e \cdot 6.000 / (36.000 \cdot 47.000) + C4e / (36.000 \cdot 47.000) = 0$

Eq. 14: $v_d(x) = 0: -0.000 \cdot (0.000^4) / (24 \cdot 68.000 \cdot 67.000) + C1d \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 68.000 \cdot 67.000) + C2d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 68.000 \cdot 67.000) + C3d \cdot 0.000 / (68.000 \cdot 67.000) + C4d / (68.000 \cdot 67.000) = 0$

Nó 4 - Condições de contorno para Apoio Livre no último nó:

Para $x = 7.000$

Eq. 15: $Q(x) = P: -0.000 \cdot 7.000 + C1 = 14.000$

Eq. 16: $M(x) = M: -0.000 \cdot 7.000^2 / 2 + C1 \cdot 7.000 + C2 = -(28.000)$

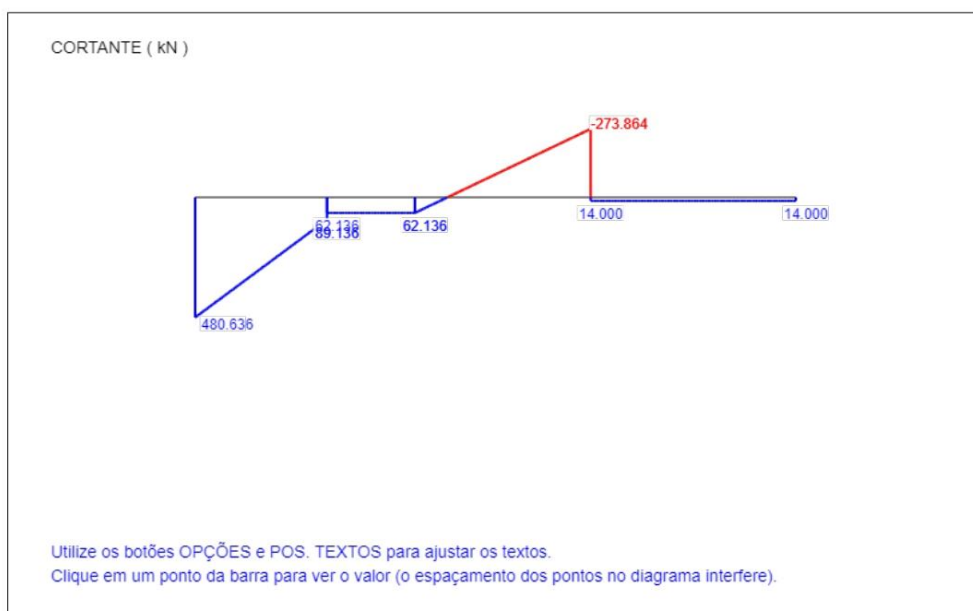
Montando as equações num sistema global matricial do tipo $A \cdot C = B$, temos:

Eq.	C1,0	C2,0	C3,0	C4,0	C1,1	C2,1	C3,1	C4,1	C1,2	C2,2	C3,2	C4,2	C1,3	C2,3	C3,3	C4,3	B
1	0.000 0	0.000 0	0.001 05	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.001 05	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
3	1.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-1.00 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	418.5 00
4	4.500 0	1.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-1.00 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	880.8 75
5	0.010 6	0.004 73	0.001 05	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-0.00 0487	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	1.388
6	0.016 0	0.010 6	0.004 73	0.001 05	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-0.00 0487	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	1.561
7	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	1.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-1.00 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
8	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	3.000 0	1.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-1.00 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-35.0 00
9	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.002 19	0.001 46	0.000 487	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-0.00 0591	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
10	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.002 19	0.002 19	0.001 46	0.000 487	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-0.00 0591	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0

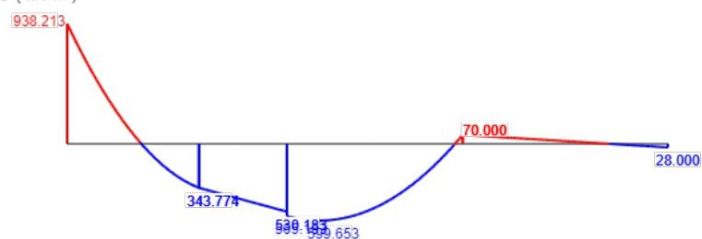
11	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	6.000	1.000	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-1.00 0	0.000 0	0.000 0	1008. 000
12	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.010 6	0.003 55	0.000 591	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-0.00 0219	0.000 0	1.191
13	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.021 3	0.010 6	0.003 55	0.000 591	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	1.787
14	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	-0.00 0219	0.000 0
15	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	1.000	0.000 0	0.000 0	0.000 0	14.00 0
16	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	7.000	1.000	0.000 0	0.000 0	28.00 0

Resolvendo o sistema linear de equações pelo Método de Gauss (vide <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>), encontram-se os valores das constantes C1 a C4 de cada trecho e, portando, as equações dos esforços de cada trecho (diagramas).

Abaixo seguem os diagramas (no sistema kN-m):



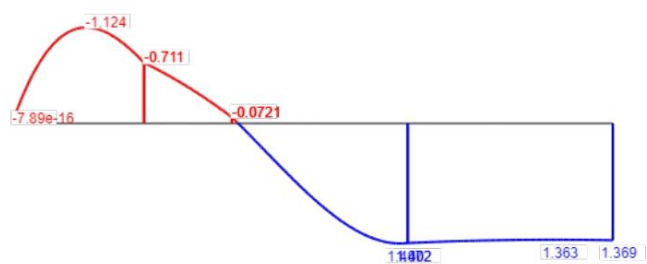
MOMENTO (kN*m)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

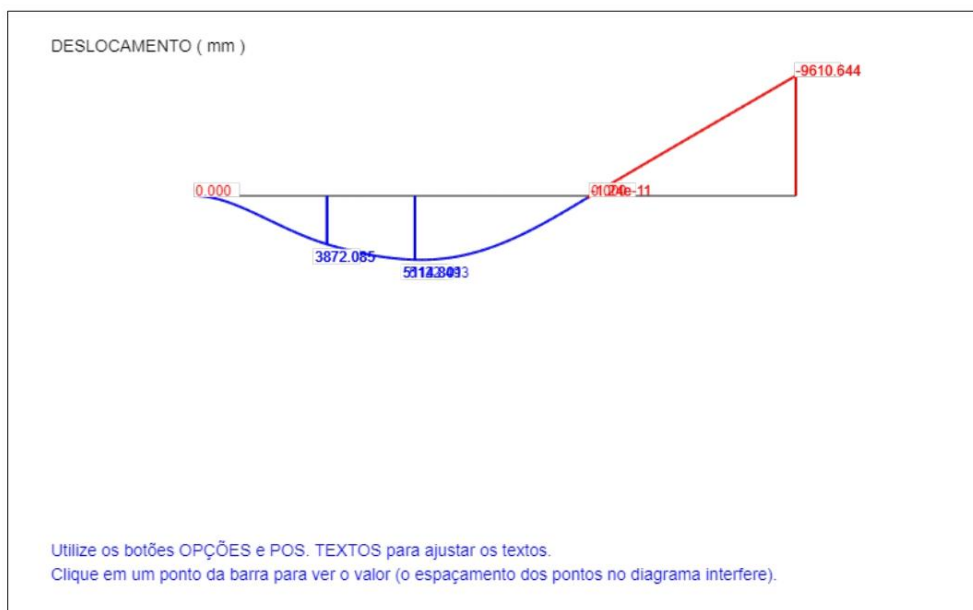
Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).

GIRO: (rad)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R.Jr. Resistência dos materiais. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2011.

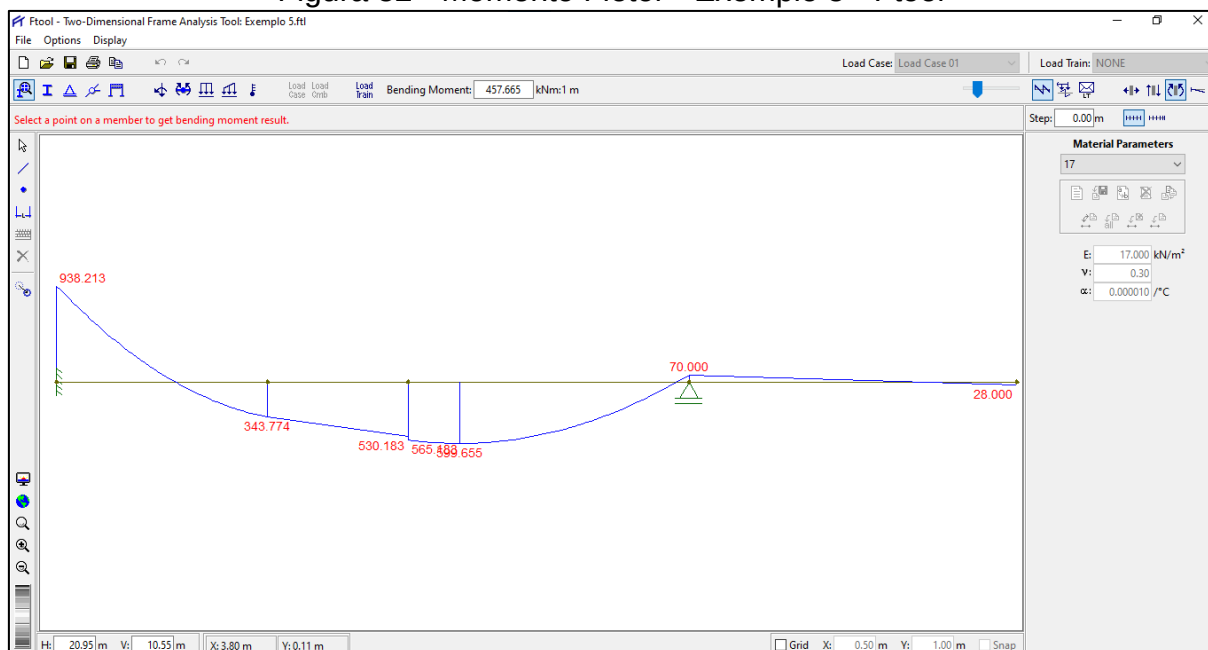
BITTENCOURT, Marco Lúcio. CAPÍTULO 6: Viga. Unicamp, 2003. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em421/semII-1999/textos/viga.pdf>>. Acesso em: 23 jul. 2020.

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini Proença. Curso de resistência dos materiais. Notas de aula – vol. 1. São Carlos: USP, 2003.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do programa já disponível *on-line*.

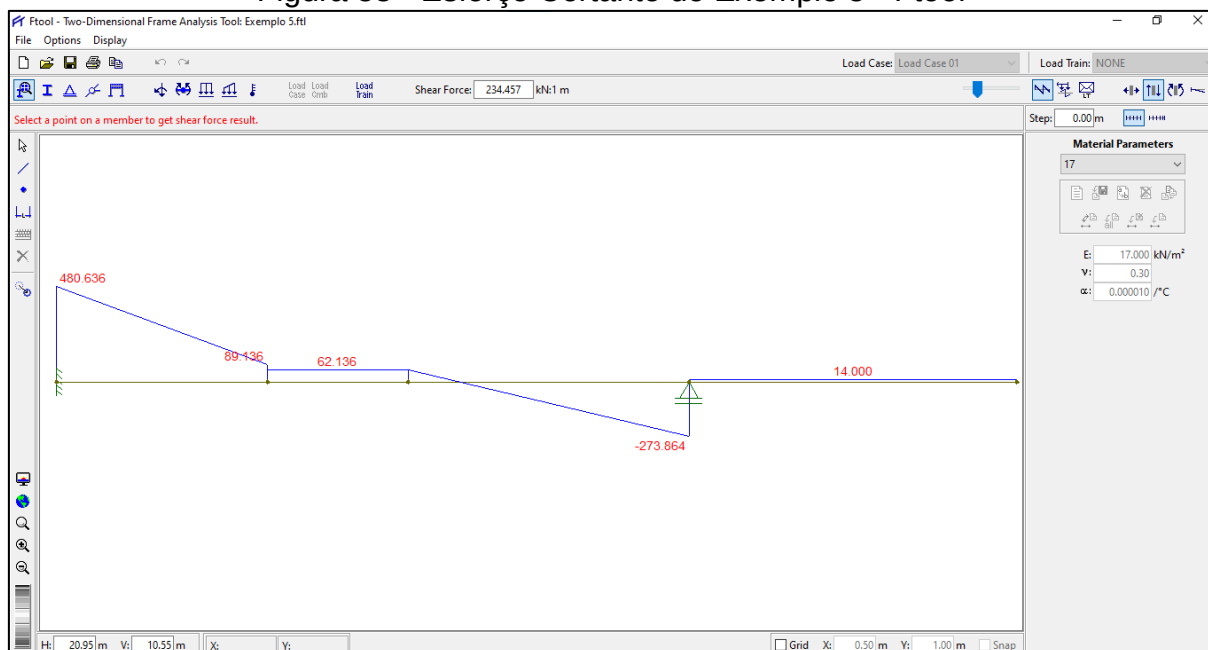
Nota-se que os diagramas apresentados pelo Ftool coincidem com os diagramas apresentados pelo módulo desenvolvido neste trabalho. Como instrumento de validação, seguem os diagramas fornecidos pelo *software* Ftool (Figuras 52 a 55).

Figura 52 - Momento Fletor - Exemplo 5 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

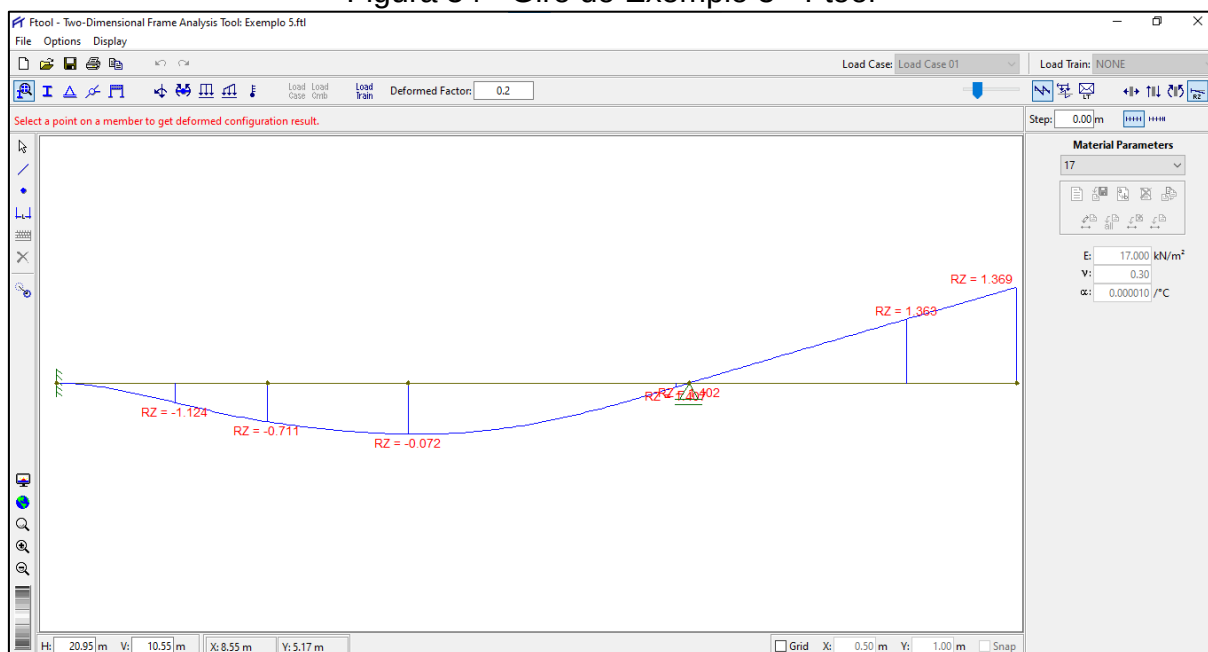
Figura 53 - Esforço Cortante do Exemplo 5 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Vale ressaltar que o diagrama de cortante do FTOOL convencionou positivo abaixo, ao contrário do módulo apresentado neste trabalho.

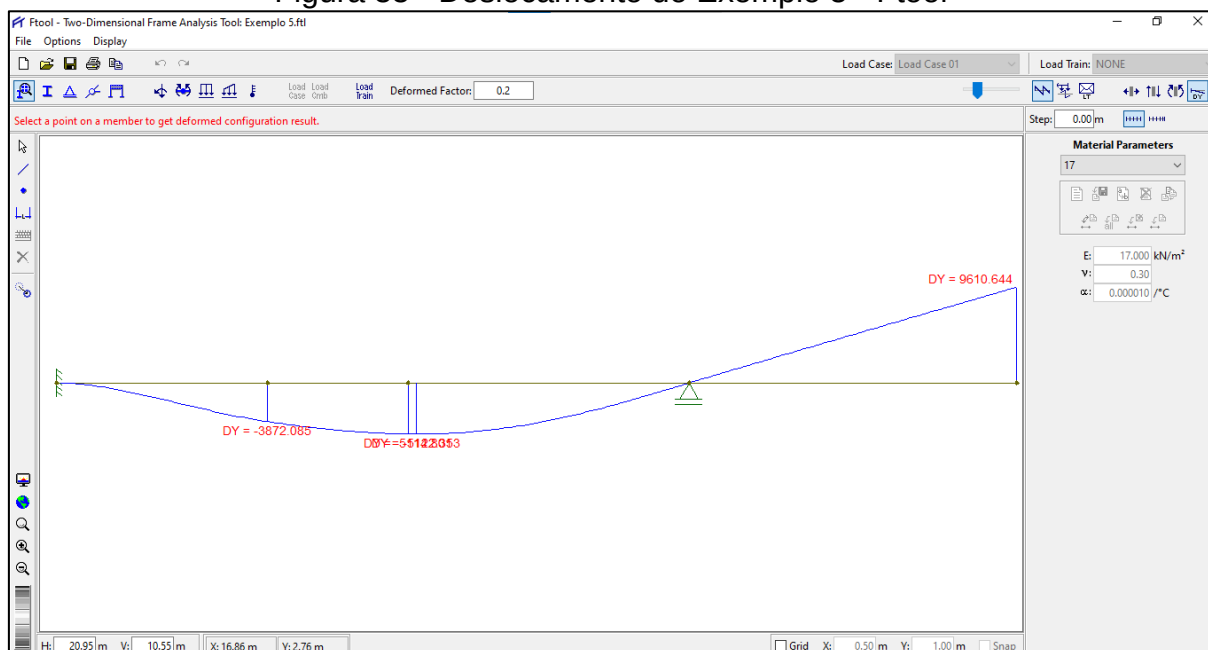
Figura 54 - Giro do Exemplo 5 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Vale ressaltar que o Ftool atribui, por convenção, os valores de giro da estrutura no diagrama de deslocamento.

Figura 55 - Deslocamento do Exemplo 5 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Nota-se que os diagramas apresentados pelo Ftool coincidem com os diagramas apresentados pelo módulo desenvolvido neste trabalho.

A.5 - EXEMPLO 6 – RESULTADO

Segue, na Figura 56, o exemplo 6 - uma estrutura com 15 nós (14 trechos) e diferentes combinações de vínculos, esforços e características geométricas.

Figura 56 - Relatório PDF da análise de vigas por Euler-Bernoulli - Exemplo 6

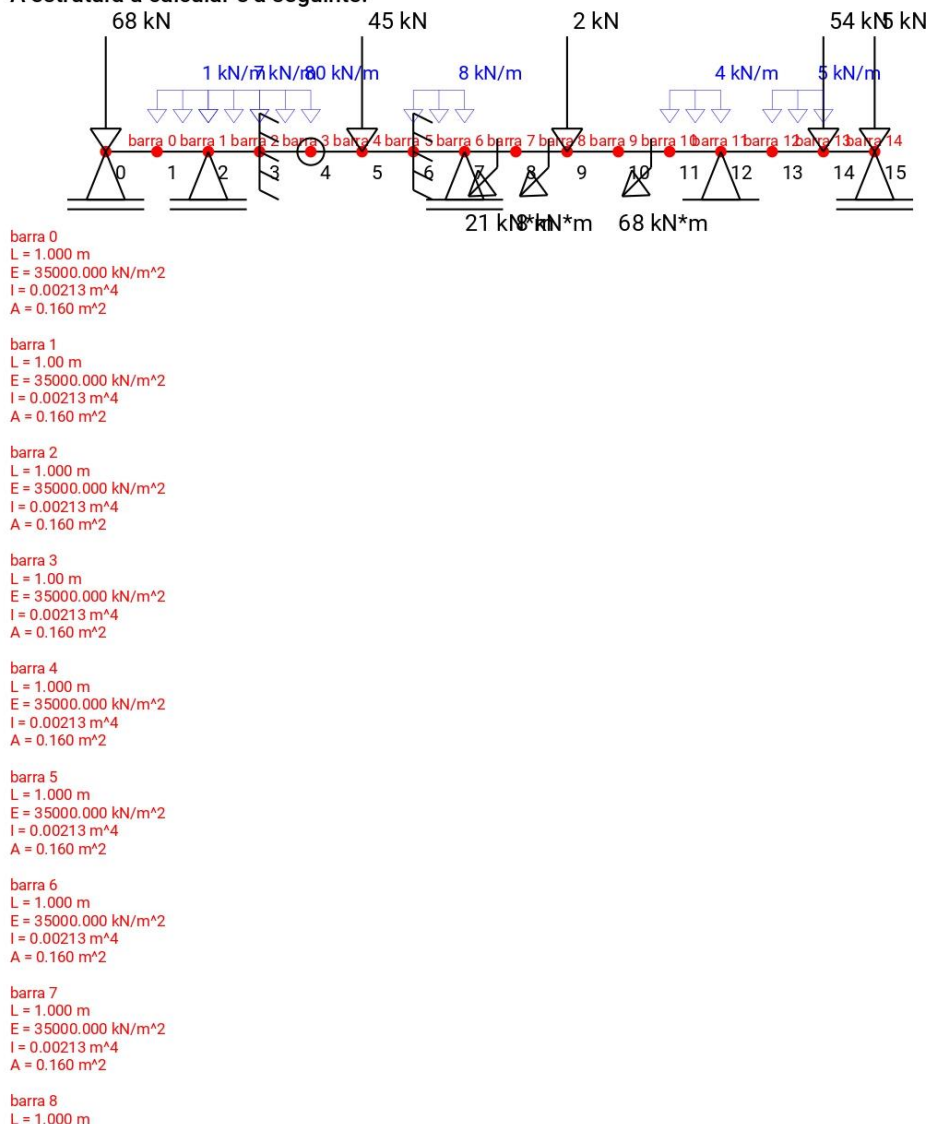
TO TRANSLATE THIS DOCUMENT, DOWNLOAD THE PDF REPORT AND TRANSLATE ON <https://www.onlinedoctranslator.com/pt/> (FREE - GENERATE COMPLETE PDF TRANSLATED FILE) OR TRANSLATE ON <https://translate.google.com/> (SELECT DOCUMENTS - FREE - BUT ONLY TRANSLATE TEXT)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Voluporanga

NEV: Núcleo de Engenharia Virtual
Título: Vigas - Método de Euler-Bernoulli
Autor: Alex Sandro Silva Coelho
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl
Tipo: Iniciação Científica com Bolsa Institucional/TCC
Curso: Engenharia Civil
Data da versão original: 30/11/2020
Data da última atualização: 08/12/2021
Data da geração do relatório: 10/12/2021

A estrutura a calcular é a seguinte:



1 de 14

Devido ao fato de a estrutura possuir muitos nós próximos, os textos ficaram sobrepostos. Entretanto pode-se visualizar a estrutura com mais nitidez na Figura 57, desenhada no Ftool.

$E = 35000.000 \text{ kN/m}^2$
 $I = 0.00213 \text{ m}^4$
 $A = 0.160 \text{ m}^2$

barra 9
 $L = 1.000 \text{ m}$
 $E = 35000.000 \text{ kN/m}^2$
 $I = 0.00213 \text{ m}^4$
 $A = 0.160 \text{ m}^2$

barra 10
 $L = 1.00 \text{ m}$
 $E = 35000.000 \text{ kN/m}^2$
 $I = 0.00213 \text{ m}^4$
 $A = 0.160 \text{ m}^2$

barra 11
 $L = 1.000 \text{ m}$
 $E = 35000.000 \text{ kN/m}^2$
 $I = 0.00213 \text{ m}^4$
 $A = 0.160 \text{ m}^2$

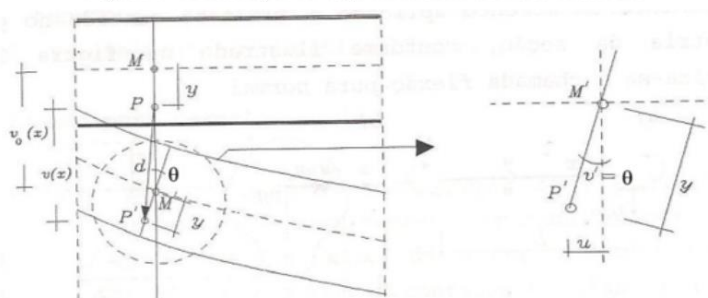
barra 12
 $L = 1.00 \text{ m}$
 $E = 35000.000 \text{ kN/m}^2$
 $I = 0.00213 \text{ m}^4$
 $A = 0.160 \text{ m}^2$

barra 13
 $L = 1.00 \text{ m}$
 $E = 35000.000 \text{ kN/m}^2$
 $I = 0.00213 \text{ m}^4$
 $A = 0.160 \text{ m}^2$

barra 14
 $L = 1.000 \text{ m}$
 $E = 35000.000 \text{ kN/m}^2$
 $I = 0.00213 \text{ m}^4$
 $A = 0.160 \text{ m}^2$

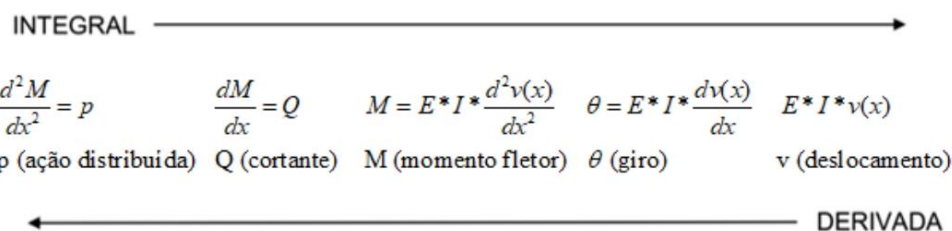
Será desenvolvido aqui o Método da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, conforme Proença (2003). O modelo proposto supõe que o movimento de deformação que ocorre em uma viga submetida à flexão não altera a geometria das seções, que são planas originalmente (seção que passa por M e P na figura 1); ou seja, essas seções continuarão a ser planas e ortogonais ao eixo da viga mesmo após estarem deformadas (seção que passa por M' e P' da figura 1), não importando a distância longitudinal da extremidade.

Figura 1 - Deformação de viga no modelo de Euler-Bernoulli.



Fonte: Adaptado de Proença (2003, p. 98)

Após o desenvolvimento matemático, partir das hipóteses acima, da Lei de Hooke, do equilíbrio de forças e momentos e da limitação do problema a pequenos deslocamentos, Proença (2003), para cada trecho de viga delimitado pela continuidade das funções dos esforços e deslocamentos, chega a:



Conforme Proença (2003), quando houver alterações ou descontinuidade das funções $q(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $v(x)$ ou $\theta(x)$, a viga deverá ser dividida em trechos. Posto isso, os casos mais comuns decorrentes são:

- Apoios intermediários;
- Ação (força ou momento) concentrada;
- Variação da rigidez à flexão.

Sendo assim, cada trecho de viga terá o equacionamento, sendo as constantes C_1 a C_4 determinadas em função das condições de contorno do trecho:

Cortante: $Q(x) = -p * x + C_1$

Momento Fletor: $M(x) = -\left(\frac{p * x^2}{2}\right) + C_1 * x + C_2$

Giro: $E * I * \theta(x) = -\left(\frac{p * x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_1 * x^2}{2}\right) + C_2 * x + C_3$

Deslocamento: $E * I * v(x) = -\left(\frac{p * x^4}{24}\right) + \left(\frac{C_1 * x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_2 * x^2}{2}\right) + C_3 * x + C_4$

Ao final, portanto, haverá um sistema de equações para determinar as constantes C_1 a C_4 de cada trecho

ATENÇÃO: A PARTIR DAQUI, O PROGRAMA INTERNAMENTE TRABALHA NO SISTEMA kN-m.

Abaixo segue a resolução.

A ordem do sistema é (4 x n° de trechos): 60

Barra 0 - Nós(0 - 1)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴

Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 1 - Nós(1 - 2)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴

Comprimento da Barra (L): 1.00m

Barra 2 - Nós(2 - 3)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 3 - Nós(3 - 4)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.00m

Barra 4 - Nós(4 - 5)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 5 - Nós(5 - 6)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 6 - Nós(6 - 7)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 7 - Nós(7 - 8)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 8 - Nós(8 - 9)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 9 - Nós(9 - 10)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 10 - Nós(10 - 11)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.00m

Barra 11 - Nós(11 - 12)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.000m

Barra 12 - Nós(12 - 13)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.00m

Barra 13 - Nós(13 - 14)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.00m

Barra 14 - Nós(14 - 15)

Módulo de Elasticidade (E): 35000.000kN/m²
Momento de Inércia (I): 0.00213m⁴
Comprimento da Barra (L): 1.000m

Condições de Contorno

As condições de contorno que serão aplicadas para a resolução dos cálculos posteriores são adotadas conforme o tipo de apoio que o nó apresenta: móvel, fixo, engaste, rótula ou livre. Ademais, elas mudam se os apoios forem nas extremidades ou internos (para o caso de mais de uma barra na estrutura). Posto isso, abaixo têm-se o detalhamento das características de cada condição de contorno conforme o tipo de apoio.

Para os apoios que se encontram nas extremidades da estrutura, as equações de condições de contorno são mais simples. Logo, usa-se:

Obs: será utilizada a letra P para força e M para momento concentrado.

Apoio Móvel:

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Apoio Fixo:

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Engaste:

$$\theta(x) = 0 \rightarrow -q \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x/E \cdot I + C3/E \cdot I = 0$$

$$v(x) = 0 \rightarrow -q \cdot (x^4)/24 \cdot E \cdot I + C1 \cdot x^3/6 \cdot E \cdot I + C2 \cdot x^2/2 \cdot E \cdot I + C3 \cdot x/E \cdot I + C4/E \cdot I = 0$$

Livre:

$$Q(x) = P \rightarrow -P - q \cdot x + C1 = 0$$

$$M(x) = M \rightarrow -M - q \cdot x^2/2 + C1 \cdot x + C2 = 0$$

Rótula: Não é possível haver rótulas nas extremidades de uma estrutura

Para os apoios que se encontram internamente na estrutura, as equações de compatibilização dos trechos abordam mais características. Desse modo, tem-se que:

Obs: será utilizada a letra "e" para lado esquerdo do ponto e "d" para lado direito.

Apoio Móvel:

$$\begin{aligned} M_e(x_e) - M_d(x_d) &= M \rightarrow (-q_e x_e^2/2 + C1e x_e + C2e) - (-q_d x_d^2/2 + C1d x_d + C2d) = M \\ \theta_e(x_e) &= \theta_d(x_d) \rightarrow -q_e x_e^3/6EeIe + C1e x_e^2/2EeIe + C2e x_e/EeIe + C3e/EeIe = -q_d x_d^3/6EdId + C1d x_d^2/2EdId + C2d x_d/EdId + C3d/EdId \\ v_e(x_e) &= 0 \rightarrow -q_e (x_e^4)/24EeIe + C1e x_e^3/6EeIe + C2e x_e^2/2EeIe + C3e x_e/EeIe + C4e/EeIe = 0 \\ v_d(x_d) &= 0 \rightarrow -q_d (x_d^4)/24EdId + C1d x_d^3/6EdId + C2d x_d^2/2EdId + C3d x_d/EdId + C4d/EdId = 0 \end{aligned}$$

Apoio Fixo:

$$\begin{aligned} M_e(x_e) - M_d(x_d) &= M \rightarrow (-q_e x_e^2/2 + C1e x_e + C2e) - (-q_d x_d^2/2 + C1d x_d + C2d) = M \\ \theta_e(x_e) &= \theta_d(x_d) \rightarrow -q_e x_e^3/6EeIe + C1e x_e^2/2EeIe + C2e x_e/EeIe + C3e/EeIe = -q_d x_d^3/6EdId + C1d x_d^2/2EdId + C2d x_d/EdId + C3d/EdId \\ v_e(x_e) &= 0 \rightarrow -q_e (x_e^4)/24EeIe + C1e x_e^3/6EeIe + C2e x_e^2/2EeIe + C3e x_e/EeIe + C4e/EeIe = 0 \\ v_d(x_d) &= 0 \rightarrow -q_d (x_d^4)/24EdId + C1d x_d^3/6EdId + C2d x_d^2/2EdId + C3d x_d/EdId + C4d/EdId = 0 \end{aligned}$$

Engaste:

$$\begin{aligned} \theta_e(x_e) &= 0 \rightarrow -q_e x_e^3/6EeIe + C1e x_e^2/2EeIe + C2e x_e/EeIe + C3e/EeIe = 0 \\ \theta_d(x_d) &= 0 \rightarrow -q_d x_d^3/6EdId + C1d x_d^2/2EdId + C2d x_d/EdId + C3d/EdId = 0 \\ v_e(x_e) &= 0 \rightarrow -q_e (x_e^4)/24EeIe + C1e x_e^3/6EeIe + C2e x_e^2/2EeIe + C3e x_e/EeIe + C4e/EeIe = 0 \\ v_d(x_d) &= 0 \rightarrow -q_d (x_d^4)/24EdId + C1d x_d^3/6EdId + C2d x_d^2/2EdId + C3d x_d/EdId + C4d/EdId = 0 \end{aligned}$$

Rótula:

$$\begin{aligned} Q_e(x_e) - Q_d(x_d) &= P \rightarrow (-q_e x_e + C1e) - (-q_d x_d + C1d) = P \\ M_e(x_e) &= M \rightarrow -M - q_e x_e^2/2 + C1e x_e + C2e = 0 \\ M_d(x_d) &= M \rightarrow -M - q_d x_d^2/2 + C1d x_d + C2d = 0 \\ v_e(x_e) &= v_d(x_d) \rightarrow -q_e (x_e^4)/24EeIe + C1e x_e^3/6EeIe + C2e x_e^2/2EeIe + C3e x_e/EeIe + C4e/EeIe = -q_d (x_d^4)/24EdId + C1d x_d^3/6EdId + C2d x_d^2/2EdId + C3d x_d/EdId + C4d/EdId \end{aligned}$$

Livre:

$$\begin{aligned} Q_e(x_e) - Q_d(x_d) &= P \rightarrow (-q_e x_e + C1e) - (-q_d x_d + C1d) = P \\ M_e(x_e) - M_d(x_d) &= M \rightarrow (-q_e x_e^2/2 + C1e x_e + C2e) - (-q_d x_d^2/2 + C1d x_d + C2d) = M \\ \theta_e(x_e) &= \theta_d(x_d) \rightarrow -q_e x_e^3/6EeIe + C1e x_e^2/2EeIe + C2e x_e/EeIe + C3e/EeIe = -q_d x_d^3/6EdId + C1d x_d^2/2EdId + C2d x_d/EdId + C3d/EdId \\ v_e(x_e) &= v_d(x_d) \rightarrow -q_e (x_e^4)/24EeIe + C1e x_e^3/6EeIe + C2e x_e^2/2EeIe + C3e x_e/EeIe + C4e/EeIe = -q_d (x_d^4)/24EdId + C1d x_d^3/6EdId + C2d x_d^2/2EdId + C3d x_d/EdId + C4d/EdId \end{aligned}$$

Haja vista os apoios da estrutura aqui relatada, as equações a serem utilizadas nos cálculos são:

Nó 0 - Condições de contorno para Apoio Móvel no primeiro nó:

Para $x = 0$

$$\text{Eq. 1: } M(x) = M: -0.000 - 0.000 \cdot 0^2/2 + C1 \cdot 0 + C2 = 0$$

$$\text{Eq. 2: } v(x) = 0: -0.000 \cdot (0^4)/(24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1 \cdot 0^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2 \cdot 0^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3 \cdot 0/(35000.000 \cdot 0.00213) + C4/(35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

Nó 1 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 3: } Q_e(x) - Q_d(x) = P \rightarrow (-0.000 \cdot 1.00 + C1e) - (-0.000 \cdot 0.000 + C1d) = 0.000$$

$$\text{Eq. 4: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-0.000 \cdot 1.00^2/2 + C1e \cdot 1.00 + C2e) - (-0.000 \cdot 0.000^2/2 + C1d \cdot 0.000 + C2d) = - (0.000)$$

$$\text{Eq. 5: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -0.000 \cdot 1.00^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2e \cdot 1.00 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C3e / (35000.000 \cdot 0.00213) = -0.000 \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C3d / (35000.000 \cdot 0.00213)$$

$$\text{Eq. 6: } v_e(x) = v_d(x) \rightarrow -0.000 \cdot (1.00^4) / (24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2e \cdot 1.00^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3e \cdot 1.00 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C4e / (35000.000 \cdot 0.00213) = -0.000 \cdot (0.000^4) / (24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1d \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3d \cdot 0.000 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C4d / (35000.000 \cdot 0.00213)$$

Nó 2 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Móvel interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 7: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-1.000 \cdot 1.00^2/2 + C1e \cdot 1.00 + C2e) - (-0.000 \cdot 0.000^2/2 + C1d \cdot 0.000 + C2d) = - (0.000)$$

$$\text{Eq. 8: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -1.000 \cdot 1.00^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2e \cdot 1.00 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C3e / (35000.000 \cdot 0.00213) = -0.000 \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C3d / (35000.000 \cdot 0.00213)$$

$$\text{Eq. 9: } v_e(x) = 0: -1.000 \cdot (1.00^4) / (24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2e \cdot 1.00^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3e \cdot 1.00 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C4e / (35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

$$\text{Eq. 10: } v_d(x) = 0: -0.000 \cdot (0.000^4) / (24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1d \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3d \cdot 0.000 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C4d / (35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

Nó 3 - Equações de compatibilização de trechos para Engaste interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 11: } \theta_e(x) = 0: -7.000 \cdot 1.00^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2e \cdot 1.00 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C3e / (35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

$$\text{Eq. 12: } \theta_d(x) = 0: -0.000 \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C3d / (35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

$$\text{Eq. 13: } v_e(x) = 0: -7.000 \cdot (1.00^4) / (24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2e \cdot 1.00^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3e \cdot 1.00 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C4e / (35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

$$\text{Eq. 14: } v_d(x) = 0: -0.000 \cdot (0.000^4) / (24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1d \cdot 0.000^3 / (6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000^2 / (2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3d \cdot 0.000 / (35000.000 \cdot 0.00213) + C4d / (35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

Nó 4 - Equações de compatibilização de trechos para Rótula:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 15: } Q_e(x) - Q_d(x) = P \rightarrow (-80.000 \cdot 1.00 + C1e) - (-0.000 \cdot 0.000 + C1d) = 0.000$$

$$\text{Eq. 16: } M_e(x) = 0: -(0.000) - 80.000 \cdot 1.00^2/2 + C1e \cdot 1.00 + C2e = 0$$

$$\text{Eq. 17: } M_d(x) = 0: -(0.000) - 0.000 \cdot 0.000^2/2 + C1d \cdot 0.000 + C2d = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. 18: } v_e(x) = v_d(x) \rightarrow & -80.000 \cdot (1.00^4)/(24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + \\ & C2e \cdot 1.00^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3e \cdot 1.00/(35000.000 \cdot 0.00213) + C4e/(35000.000 \cdot 0.00213) = \\ & -0.000 \cdot (0.000^4)/(24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1d \cdot 0.000^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + \\ & C3d \cdot 0.000/(35000.000 \cdot 0.00213) + C4d/(35000.000 \cdot 0.00213) \end{aligned}$$

Nó 5 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 19: } Q_e(x) - Q_d(x) = P \rightarrow (-0.000 \cdot 1.00 + C1e) - (-0.000 \cdot 0.000 + C1d) = 45.000$$

$$\text{Eq. 20: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-0.000 \cdot 1.00^2/2 + C1e \cdot 1.00 + C2e) - (-0.000 \cdot 0.000^2/2 + C1d \cdot 0.000 + C2d) = -(0.000)$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. 21: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow & -0.000 \cdot 1.00^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + \\ & C2e \cdot 1.00/(35000.000 \cdot 0.00213) + C3e/(35000.000 \cdot 0.00213) = -0.000 \cdot 0.000^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + \\ & C1d \cdot 0.000^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000/(35000.000 \cdot 0.00213) + C3d/(35000.000 \cdot 0.00213) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. 22: } v_e(x) = v_d(x) \rightarrow & -0.000 \cdot (1.00^4)/(24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + \\ & C2e \cdot 1.00^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3e \cdot 1.00/(35000.000 \cdot 0.00213) + C4e/(35000.000 \cdot 0.00213) = \\ & -0.000 \cdot (0.000^4)/(24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1d \cdot 0.000^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + \\ & C3d \cdot 0.000/(35000.000 \cdot 0.00213) + C4d/(35000.000 \cdot 0.00213) \end{aligned}$$

Nó 6 - Equações de compatibilização de trechos para Engaste interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 23: } \theta_e(x) = 0: -0.000 \cdot 1.00^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2e \cdot 1.00/(35000.000 \cdot 0.00213) + C3e/(35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

$$\text{Eq. 24: } \theta_d(x) = 0: -0.000 \cdot 0.000^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1d \cdot 0.000^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000/(35000.000 \cdot 0.00213) + C3d/(35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

$$\text{Eq. 25: } v_e(x) = 0: -0.000 \cdot (1.00^4)/(24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2e \cdot 1.00^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3e \cdot 1.00/(35000.000 \cdot 0.00213) + C4e/(35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

$$\text{Eq. 26: } v_d(x) = 0: -0.000 \cdot (0.000^4)/(24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1d \cdot 0.000^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C3d \cdot 0.000/(35000.000 \cdot 0.00213) + C4d/(35000.000 \cdot 0.00213) = 0$$

Nó 7 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Móvel interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 27: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-8.000 \cdot 1.00^2/2 + C1e \cdot 1.00 + C2e) - (-0.000 \cdot 0.000^2/2 + C1d \cdot 0.000 + C2d) = -(21.000)$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. 28: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow & -8.000 \cdot 1.00^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + \\ & C2e \cdot 1.00/(35000.000 \cdot 0.00213) + C3e/(35000.000 \cdot 0.00213) = -0.000 \cdot 0.000^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + \\ & C1d \cdot 0.000^2/(2 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C2d \cdot 0.000/(35000.000 \cdot 0.00213) + C3d/(35000.000 \cdot 0.00213) \end{aligned}$$

$$\text{Eq. 29: } v_e(x) = 0: -8.000 \cdot (1.00^4)/(24 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) + C1e \cdot 1.00^3/(6 \cdot 35000.000 \cdot 0.00213) +$$

$$C2e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C3e*1.00/(35000.000*0.00213) + C4e/(35000.000*0.00213) = 0$$

$$\text{Eq. 30: } v_d(x) = 0: -0.000*(0.000^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C2d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C3d*0.000/(35000.000*0.00213) + C4d/(35000.000*0.00213) = 0$$

Nó 8 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 31: } Q_e(x) - Q_d(x) = P \rightarrow (-0.000*1.00 + C1e) - (-0.000*0.000 + C1d) = 0.000$$

$$\text{Eq. 32: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-0.000*1.00^2/2 + C1e*1.00 + C2e) - (-0.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = - (8.000)$$

$$\text{Eq. 33: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -0.000*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C2e*1.00/(35000.000*0.00213) + C3e/(35000.000*0.00213) = -0.000*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C2d*0.000/(35000.000*0.00213) + C3d/(35000.000*0.00213)$$

$$\text{Eq. 34: } v_e(x) = v_d(x) \rightarrow -0.000*(1.00^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C2e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C3e*1.00/(35000.000*0.00213) + C4e/(35000.000*0.00213) = -0.000*(0.000^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C2d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C3d*0.000/(35000.000*0.00213) + C4d/(35000.000*0.00213)$$

Nó 9 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 35: } Q_e(x) - Q_d(x) = P \rightarrow (-0.000*1.00 + C1e) - (-0.000*0.000 + C1d) = 2.000$$

$$\text{Eq. 36: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-0.000*1.00^2/2 + C1e*1.00 + C2e) - (-0.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = - (0.000)$$

$$\text{Eq. 37: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -0.000*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C2e*1.00/(35000.000*0.00213) + C3e/(35000.000*0.00213) = -0.000*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C2d*0.000/(35000.000*0.00213) + C3d/(35000.000*0.00213)$$

$$\text{Eq. 38: } v_e(x) = v_d(x) \rightarrow -0.000*(1.00^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C2e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C3e*1.00/(35000.000*0.00213) + C4e/(35000.000*0.00213) = -0.000*(0.000^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C2d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C3d*0.000/(35000.000*0.00213) + C4d/(35000.000*0.00213)$$

Nó 10 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 39: } Q_e(x) - Q_d(x) = P \rightarrow (-0.000*1.00 + C1e) - (-0.000*0.000 + C1d) = 0.000$$

$$\text{Eq. 40: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-0.000*1.00^2/2 + C1e*1.00 + C2e) - (-0.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = - (68.000)$$

$$\text{Eq. 41: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -0.000*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C2e*1.00/(35000.000*0.00213) + C3e/(35000.000*0.00213) = -0.000*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C2d*0.000/(35000.000*0.00213) + C3d/(35000.000*0.00213)$$

$$\text{Eq. 42: } v_e(x) = v_d(x) \rightarrow -0.000*(1.00^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) +$$

$$C2e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C3e*1.00/(35000.000*0.00213) + C4e/(35000.000*0.00213) = -0.000*(0.000^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C2d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C3d*0.000/(35000.000*0.00213) + C4d/(35000.000*0.00213)$$

Nó 11 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 43: } Qe(x) - Qd(x) = P \rightarrow (-0.000*1.00 + C1e) - (-0.000*0.000 + C1d) = 0.000$$

$$\text{Eq. 44: } Me(x) - Md(x) = M \rightarrow (-0.000*1.00^2/2 + C1e*1.00 + C2e) - (-0.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = - (0.000)$$

$$\text{Eq. 45: } \theta e(x) = \theta d(x) \rightarrow -0.000*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C2e*1.00/(35000.000*0.00213) + C3e/(35000.000*0.00213) = -0.000*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C2d*0.000/(35000.000*0.00213) + C3d/(35000.000*0.00213)$$

$$\text{Eq. 46: } ve(x) = vd(x) \rightarrow -0.000*(1.00^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C2e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C3e*1.00/(35000.000*0.00213) + C4e/(35000.000*0.00213) = -0.000*(0.000^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C2d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C3d*0.000/(35000.000*0.00213) + C4d/(35000.000*0.00213)$$

Nó 12 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Fixo interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 47: } Me(x) - Md(x) = M \rightarrow (-4.000*1.00^2/2 + C1e*1.00 + C2e) - (-0.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = - (0.000)$$

$$\text{Eq. 48: } \theta e(x) = \theta d(x) \rightarrow -4.000*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C2e*1.00/(35000.000*0.00213) + C3e/(35000.000*0.00213) = -0.000*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C2d*0.000/(35000.000*0.00213) + C3d/(35000.000*0.00213)$$

$$\text{Eq. 49: } ve(x) = 0: -4.000*(1.00^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C2e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C3e*1.00/(35000.000*0.00213) + C4e/(35000.000*0.00213) = 0$$

$$\text{Eq. 50: } vd(x) = 0: -0.000*(0.000^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C2d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C3d*0.000/(35000.000*0.00213) + C4d/(35000.000*0.00213) = 0$$

Nó 13 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 51: } Qe(x) - Qd(x) = P \rightarrow (-0.000*1.00 + C1e) - (-0.000*0.000 + C1d) = 0.000$$

$$\text{Eq. 52: } Me(x) - Md(x) = M \rightarrow (-0.000*1.00^2/2 + C1e*1.00 + C2e) - (-0.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = - (0.000)$$

$$\text{Eq. 53: } \theta e(x) = \theta d(x) \rightarrow -0.000*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C2e*1.00/(35000.000*0.00213) + C3e/(35000.000*0.00213) = -0.000*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C2d*0.000/(35000.000*0.00213) + C3d/(35000.000*0.00213)$$

$$\text{Eq. 54: } ve(x) = vd(x) \rightarrow -0.000*(1.00^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C2e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C3e*1.00/(35000.000*0.00213) + C4e/(35000.000*0.00213) = -0.000*(0.000^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C2d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C3d*0.000/(35000.000*0.00213) + C4d/(35000.000*0.00213)$$

$$(2*35000.000*0.00213) + C3d*0.000/(35000.000*0.00213) + C4d/(35000.000*0.00213)$$

Nó 14 - Equações de compatibilização de trechos para Apoio Livre interno:

Para $x = 1.00$

$$\text{Eq. 55: } Q_e(x) - Q_d(x) = P \rightarrow (-5.000*1.00 + C1e) - (-0.000*0.000 + C1d) = 54.000$$

$$\text{Eq. 56: } M_e(x) - M_d(x) = M \rightarrow (-5.000*1.00^2/2 + C1e*1.00 + C2e) - (-0.000*0.000^2/2 + C1d*0.000 + C2d) = - (0.000)$$

$$\text{Eq. 57: } \theta_e(x) = \theta_d(x) \rightarrow -5.000*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C2e*1.00/(35000.000*0.00213) + C3e/(35000.000*0.00213) = -0.000*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C2d*0.000/(35000.000*0.00213) + C3d/(35000.000*0.00213)$$

$$\text{Eq. 58: } v_e(x) = v_d(x) \rightarrow -5.000*(1.00^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1e*1.00^3/(6*35000.000*0.00213) + C2e*1.00^2/(2*35000.000*0.00213) + C3e*1.00/(35000.000*0.00213) + C4e/(35000.000*0.00213) = -0.000*(0.000^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1d*0.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C2d*0.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C3d*0.000/(35000.000*0.00213) + C4d/(35000.000*0.00213)$$

Nó 15 - Condições de contorno para Apoio Móvel no último nó:

Para $x = 1.000$

$$\text{Eq. 59: } M(x) = M: -0.000 - 0.000*1.000^2/2 + C1*1.000 + C2 = 0$$

$$\text{Eq. 60: } v(x) = 0: -0.000*(1.000^4)/(24*35000.000*0.00213) + C1*1.000^3/(6*35000.000*0.00213) + C2*1.000^2/(2*35000.000*0.00213) + C3*1.000/(35000.000*0.00213) + C4/(35000.000*0.00213) = 0$$

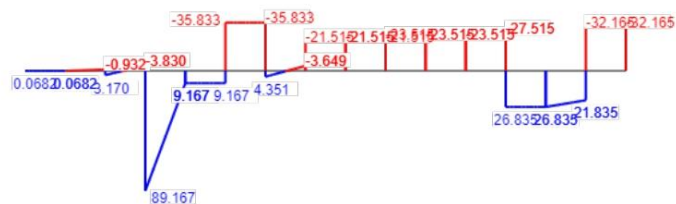
Montando as equações num sistema global matricial do tipo $A^*C=B$, temos:

A MATRIZ NÃO PÔDE SER IMPRESSA (SISTEMA GLOBAL COM ORDEM MAIOR QUE 26). Ela pode ser visualizada no arquivo SISTEMA_GLOBAL.txt, do qual foi feito o download automático, e que pode ser gerado novamente pelo botão SISTEMA GLOBAL.

Resolvendo o sistema linear de equações pelo Método de Gauss (vide <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>), encontram-se os valores das constantes C1 a C4 de cada trecho e, portando, as equações dos esforços de cada trecho (diagramas).

Abaixo seguem os diagramas (no sistema kN-m):

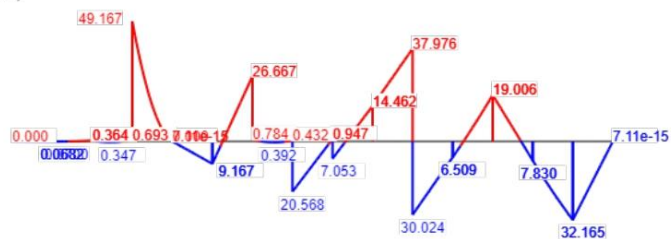
CORTANTE (kN)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).

MOMENTO (kN*m)



Utilize os botões OPÇÕES e POS. TEXTOS para ajustar os textos.

Clique em um ponto da barra para ver o valor (o espaçamento dos pontos no diagrama interfere).

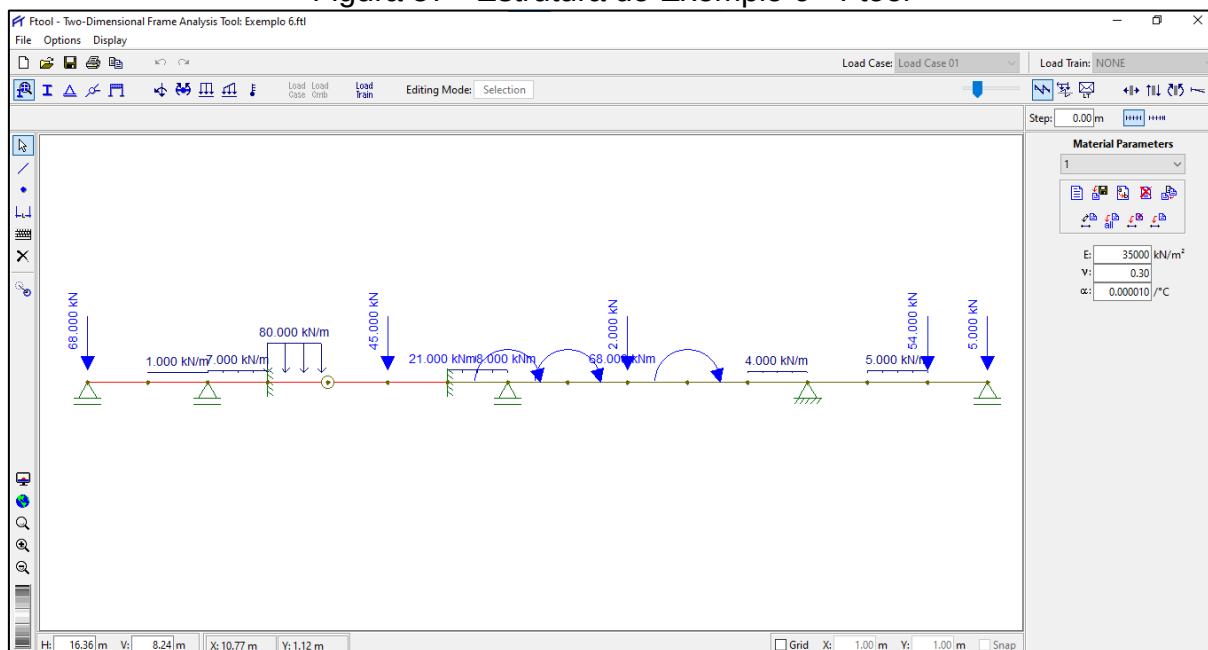
BITTENCOURT, Marco Lúcio. CAPÍTULO 6: Viga. Unicamp, 2003. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em421/seml-1999/textos/viga.pdf>>. Acesso em: 23 jul. 2020.

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini Proença. Curso de resistência dos materiais. Notas de aula – vol. 1. São Carlos: USP, 2003.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do programa já disponível *on-line*.

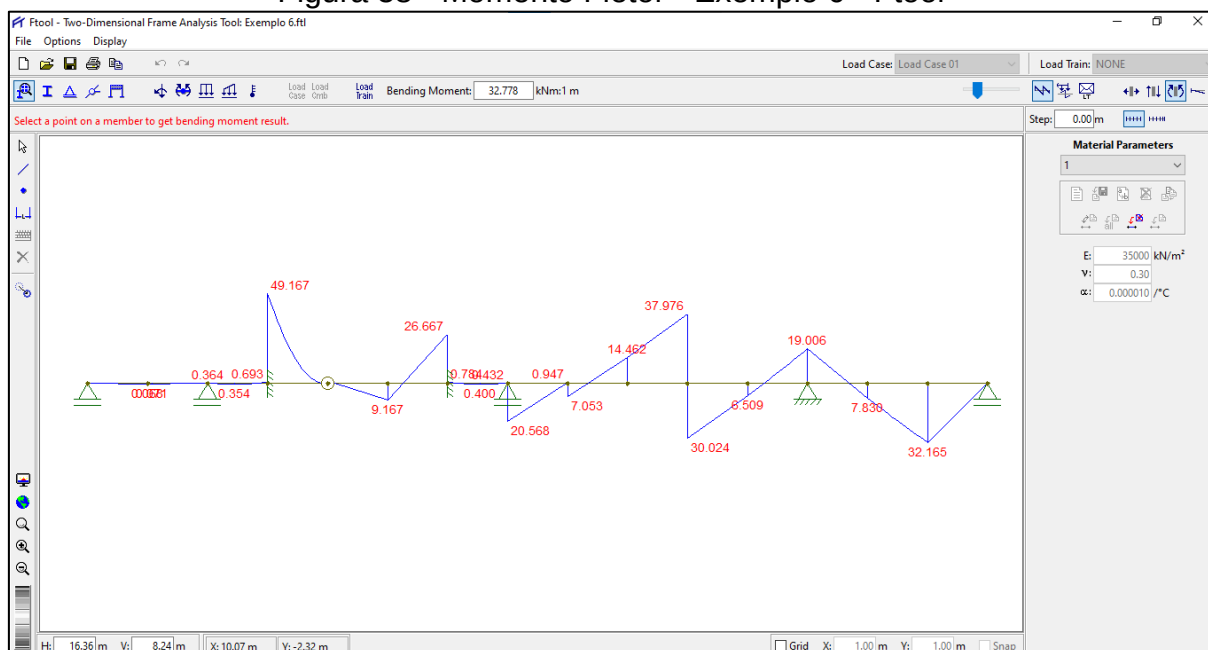
Nota-se que os diagramas apresentados pelo Ftool coincidem com os diagramas apresentados pelo módulo desenvolvido neste trabalho. Como instrumento de validação, seguem os diagramas fornecidos pelo *software* Ftool (Figuras 57 a 61).

Figura 57 - Estrutura do Exemplo 6 - Ftool



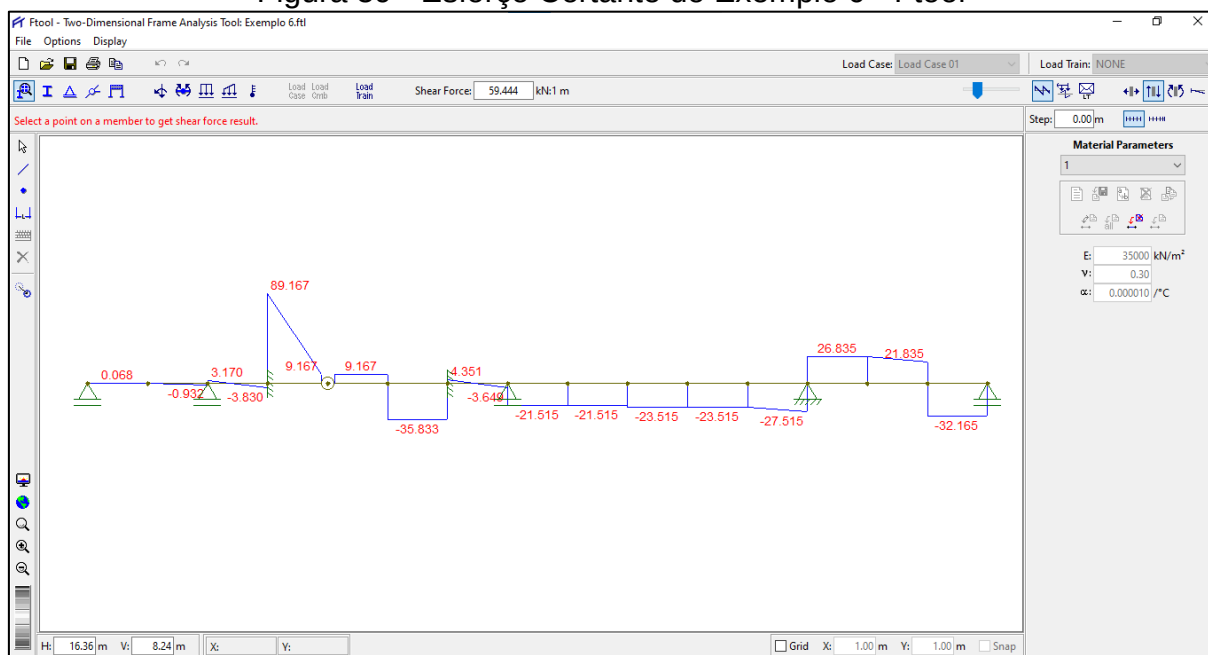
Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Figura 58 - Momento Fletor - Exemplo 6 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

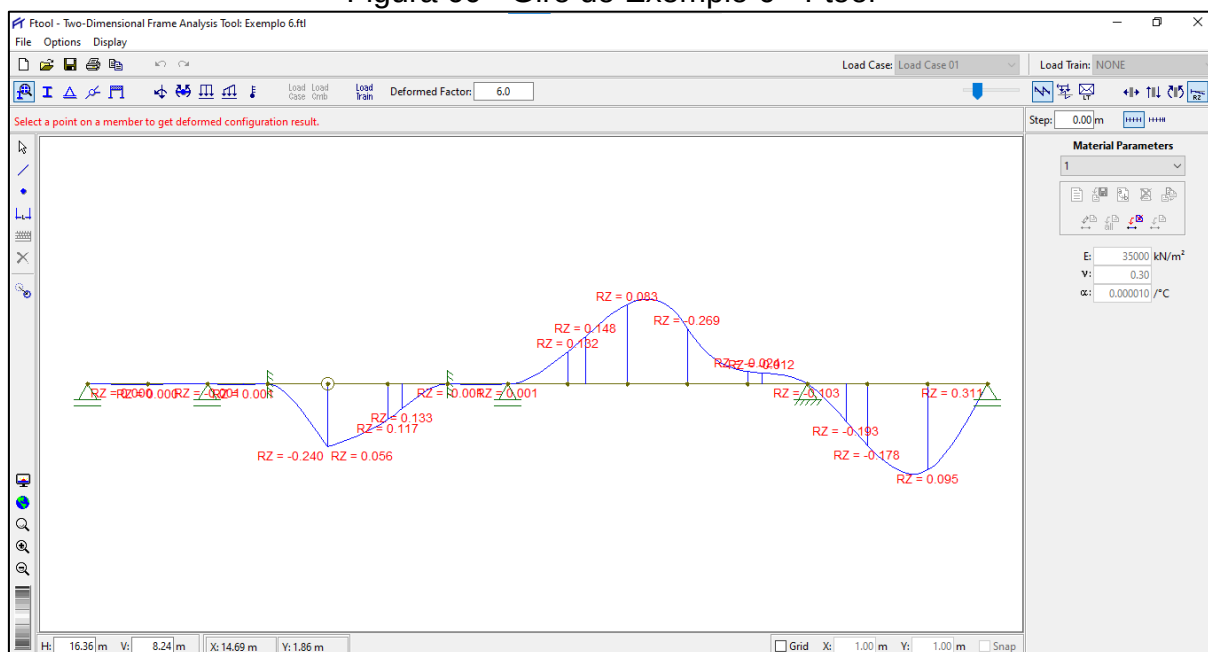
Figura 59 - Esforço Cortante do Exemplo 6 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

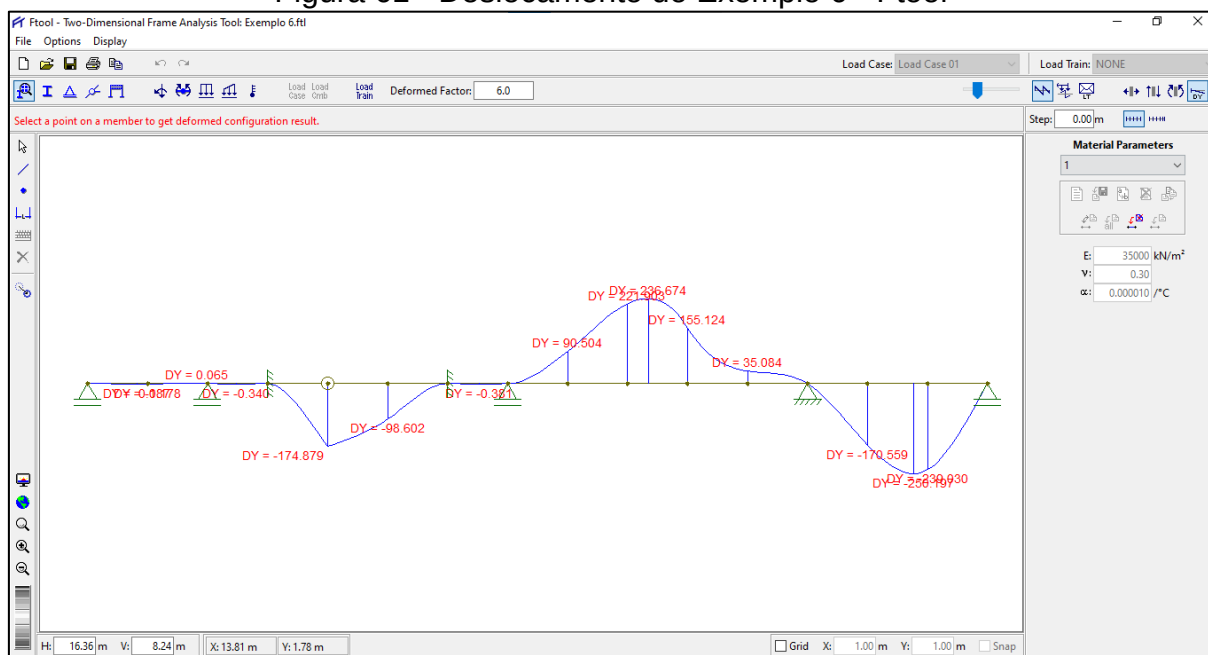
Vale ressaltar que o diagrama de cortante do FTOOL convencionou positivo abaixo, ao contrário do módulo apresentado neste trabalho.

Figura 60 - Giro do Exemplo 6 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Figura 61 - Deslocamento do Exemplo 6 - Ftool



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), a partir do *software* Ftool.

Nota-se que os diagramas apresentados pelo Ftool coincidem com os diagramas apresentados pelo módulo desenvolvido neste trabalho.